Die

Differentialgeometrie

der Schrödingergleichung

Diplomarbeit
zur Erlangung des Magistergrades

an der
Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Leopold-Franzens-Universität Innsbruck

vorgelegt von

Klaus Rheinberger

eingereicht bei

Gebhard Grübl

Innsbruck, im März 2000

Doch Mut und nicht verzweifeln, lieber Leser! Ich halt's unter meiner Würde, und mir soll es genügen, dich meiner Macht ausgeliefert zu wissen.

Laurence Sterne *Tristram Shandy*

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **v**

1 Die Galileische Raumzeit **1**
1.1 Definition einer Galileischen Mannigfaltigkeit 1
1.2 Äquivalente Formulierungen 4
1.3 Inertiale Rahmen und inertiale Karten 10
1.4 Die Automorphismengruppe einer Galileischen Mannigfaltigkeit 12
1.5 Vollständige Galileische Mannigfaltigkeiten 13
1.6 Charakterisierung durch eine Υ-Struktur 16

2 Die Schrödingergleichungen auf M **19**
2.1 Die Wellenfunktion eines spinlosen Teilchens 19
2.2 Minimale Kopplung 21
2.3 Ortsoperatoren und Impulsoperatoren 31
2.4 Die Schrödingergleichungen auf M 33

3 Die Schrödingergleichungen auf $Gal(M)$ **43**
3.1 Induzierte Strukturen auf $Gal(M)$ 43
3.2 Die Schrödingergleichungen auf $Gal(M)$ 50
3.3 Physikalische Lösungen 54

4 Die Theorie auf Bargmann-Mannigfaltigkeiten **61**
4.1 Die induzierte Galileische Mannigfaltigkeit 61
4.2 Die Schrödingergleichungen auf $\mathbb{M}$ 72
4.3 Orts- und Impulserwartungswerte 84
4.4 Das Stromdichtevektorfeld 89
4.5 Die Bargmann-Mannigfaltigkeiten zu M 92

Literaturverzeichnis **95**

Danksagung und Lebenslauf **99**

Das einfache irische Volk: Aber das ist doch bestimmt nicht der Anfang, oder? So kann man keine Geschichte anfangen lassen.

Ich: Nein, das ist nicht der Anfang.

Das einfache irische Volk: Aber was...

Ich: Waren Sie denn noch nie im Kino? Dies ist der Vorspann. Der Vorspann zeigt die Höhepunkte der Geschichte.

Flann O'Brien *Trost und Rat*

Einleitung

In seiner Arbeit [Tra, p.29] aus dem Jahre 1970 schreibt Andrzej Trautman:

> *Few words have been abused by physicists more than relativity, symmetry, covariance, invariance and gauge or coordinate transformations. [...] Fibre bundles provide a convenient framework for discussing the concepts of relativity, invariance, and gauge transformations.*

Das Ziel der ersten beiden Kapitel der vorliegenden Arbeit ist es, in Anlehnung an Trautman und mit Hilfe der Differentialgeometrie, insbesondere der Theorie der Zusammenhänge in Prinzipalfaserbündeln, mehr Klarheit in die Konstruktion einer Schrödingergleichung zu bringen, wie man sie aus einer einführenden Vorlesung über Quantenmechanik kennt. Wir beschränken uns dabei auf den Fall eines einzelnen spinlosen Teilchens.
In den meisten Lehrbüchern gehen die Autoren vom sogenannten „Konfigurationsraum der klassischen Mechanik“, typischerweise $\mathbb{R}^3$, aus und lassen nebenher die Zeit, typischerweise $\mathbb{R}$, verrinnen, d.h. sie verwenden als Raumzeit das kartesische Produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Eine Zustandsabfolge wird dann von einer durch die Zeit parametrisierten Kurve im Hilbertraum der quadratintegrablen, komplexwertigen Funktionen auf dem Konfigurationsraum beschrieben. Die Schrödingergleichung bestimmt die Evolution eines vorgegebenen Anfangsvektors im erwähnten Hilbertraum. Gleichzeitig wird meist betont, daß die so formulierte Quantenmechanik eine „nicht-relativistische“, oder besser, „Galilei-relativistische“ Theorie ist. Allerdings steht die Aufspaltung der Raumzeit in einen absoluten Zeitanteil $\mathbb{R}$ und in einen absoluten Raumanteil, dem Konfigurationsraum $\mathbb{R}^3$, in scheinbarem Widerspruch zur Galileischen Relativitätstheorie, die keinen absoluten Raum kennt.
In den angesprochenen Lehrbüchern behilft man sich aus dieser Situation, indem man Galileitransformationen zwischen den Raumzeiten betrachtet, das sind Abbildungen vom Typ

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau \\ a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit $v, a \in \mathbb{R}^3$ (Spaltenraum), $R \in O(3)$, $\tau \in \mathbb{R}$, und Matrixmultiplikation.

Es wird dann darauf hingewiesen, daß die Aufspaltung der Raumzeit in einen absoluten Zeitanteil und in einen absoluten Raumanteil der Einführung eines Inertialsystems entspricht. Zwischen je zwei Inertialsystemen vermittelt eine bestimmte Galileitransformation g. Im Weitern wird üblicherweise die zu einem Inertialsystem definierte, meist freie Schrödingergleichung, zu deren Konstruktion die Koordinaten dieses gewählten Inertialsystems verwendet werden, mittels einer Galileitransformation in ein anderes Inertialsystem umgerechnet. Die so erhaltene Differentialgleichung unterscheidet sich jedoch im Allgemeinen von der in diesem weitern Inertialsystem definierten Schrödingergleichung.
Die Schrödingergleichungen zu den einzelnen Inertialsystemen sind also im Allgemeinen inkompatibel zueinander. Im Gegensatz dazu sind die Diracgleichungen, zu deren Konstruktion üblicherweise ebenfalls die Koordinaten der jeweils gewählten Inertialsysteme verwendet werden, zueinander kompatibel, was sowohl an der „Form der Diracgleichung“ als auch an den Lorentztransformationen zwischen den Inertialsystemen der verwendeten Einstein-relativistischen Raumzeit liegt. Analoges gilt für die Maxwellgleichungen, die sich ja auch ohne Hilfe eines Inertialsystems schreiben lassen.

Das erste Kapitel liefert nun die notwendigen Definitionen und Begriffe, um in koordinatenfreier Weise von einer mathematischen Beschreibung der Galileischen Raumzeit zu sprechen. Es wird der in weiterer Folge wichtige Begriff eines inertialen Rahmens auf einer Galileischen Mannigfaltigkeit (M, θ, g, ∇) eingeführt, der das Konzept des inertialen Beobachters (Inertialsystems) in der Galileischen Relativitätstheorie beschreibt. Das Transformationsverhalten dieser Rahmen und der an sie angepaßten Karten liefert die Verbindung zu den oben angesprochenen Galileitransformation. Der Zusammenhang zwischen den Automorphismen („aktive Galileitransformationen“) und dem Wechsel von inertialen Karten („passive Galileitransformationen“) wird am Beispiel der vollständigen Galileischen Mannigfaltigkeiten dargestellt.
Im zweiten Kapitel führen wir die sogenannte „minimale Kopplung“ als Zusammenhang im trivialen $U(1)$-Prinzipalfaserbündel $M \times U(1)$ ein und definieren Wellenfunktionen als bestimmte Schnitte in einem zu $M \times U(1)$ assozierten hermiteschen Vektorbündel über M. Somit sind wir in der Lage, Schrödingergleichungen auf einer Galileischen Mannigfaltigkeit zu definieren, deren „inertialer Koordinatenausdruck“ der üblichen Konstruktion entspricht, und weiters die von Trautman angesprochenen Begriffe „Invarianz, Eichtransformationen“ etc. ohne Zuhilfenahme von Koordinatensystemen zu diskutieren. Wie aus der obigen Diskussion zu erahnen ist, erkennt man, daß es keine kanonische Schrödingergleichung gibt, sondern, daß die zu einer gewählten minimalen Kopplung und einem gewählten inertialen Rahmen definierten Schrödinger-Differentialoperatoren im Allgemeinen verschieden voneinander sind, sodaß man nicht von der, sondern von den Schrödingergleichungen sprechen sollte. In diesem Sinne ist „die Schrödingergleichung“ nicht „Galilei-invariant“ wie die Maxwellgleichungen „Lorentz-invariant“ sind. Allerdings lassen sich die Lösungsmengen zu den

verschiedenen Schrödingergleichungen, ähnlich zur sogenannten „Eichinvarianz der Schrödingergleichung“, bijektiv ineinander abbilden, sodaß die Erwartungswerte bezüglich den jeweiligen inertialen Beobachtern richtig transformieren. Ein weiteres Ergebnis ist die sogenannte „Galilei-Invarianz der freien Schrödingergleichung“, die im Falle einer vollständigen Galileischen Mannigfaltigkeit zu einer Operation der Automorphismengruppe auf der Lösungsmenge der „freien Schrödingergleichung“ führt, vgl. „Galilei-Symmetrie der Dynamik“ in der klassischen Mechanik [Rot].
Man erkennt schon an dieser vorauseilenden Diskussion, daß Andrzej Trautman mit seiner Bemerkung Recht hatte. In der vorliegenden Arbeit werden daher die von ihm zitierten Begriffe „Relativität, Symmetrie, Ko- und Invarianz“ möglichst wenig verwendet. Es wird statt dessen versucht, die angesprochenen Zusammenhänge in mathematischer Weise möglichst klar zu formulieren.
Aus dem zweiten Kapitel, das den üblichen Zugang zur Schrödingergleichung, besser, zu den Schrödingergleichungen formuliert, erkennt man, daß (bei fixierter minimaler Kopplung) ein und derselbe (dieselbe) physikalische Zustand(sabfolge) je nach Wahl eines inertialen Beobachters verschiedene mathematische Beschreibungen verlangt. Es stellt sich die Frage, ob es, wie bei den Maxwellgleichungen, einen Ausweg aus dieser unbefriedigenden Situation gibt, indem man ohne Hilfe eines inertialen Beobachters eine Schrödingergleichung auf einer geeigneten Mannigfaltigkeit definiert, sodaß man bei nachträglicher Wahl eines inertialen Beobachters, die übliche Theorie aus dem zweiten Kapitel erhält. Die Lösungen dieser Schrödingergleichung beschreiben dann auf beobachterunabhängige Weise den (die) Zustand(sabfolge) eines spinlosen Teilchens.
Die Kapitel drei und vier diskutieren zwei unterschiedliche Vorgangsweisen zur Lösung dieser Aufgabenstellung. Im dritten Kapitel wird dabei auf das Galileibündel einer Galileischen Mannigfaltigkeit zurückgegriffen, das schon bei der Formulierung von Galileischen Mannigfaltigkeiten im ersten Kapitel nützlich war. Das vierte Kapitel verwendet sogenannte „Bargmann-Mannigfaltigkeiten“ und stützt sich dabei auf die Arbeiten [Duv.et.al.], [Duv], [Tul1] und [Tul2]. Es sind aber auch eigene Erweiterungen enthalten, etwa der Bergiff des gelifteten Bargmannrahmens, die hier verwendete Definition des kanonischen linearen Zusammenhangs auf der induzierten Galileischen Mannigfaltigkeit einer Bargmann-Mannigfaltigkeit, die induzierte minimale Kopplung, die inertiale Zusammenhangs-1-Form zu einem inertialen Rahmen, deren Intgralmannigfaltigkeiten und induzierte Schnitte, der Zusammenhang zu den Schrödingergleichungen auf der induzierten Galileischen Mannigfaltigkeit, die Definition der Impuls- und Ortsoperatoren sowie die äquivalente Formulierung der Impulsortsoperatoren ausgehend von einem inertialen Dualrahmen, die beobachterunabhängige Definition des Stromdichtevektorfeldes einer Wellenfunktion und Satz 4.7.

Es gibt eine Theorie, die besagt, wenn jemals irgendwer rausfindet, wozu das Universum da ist und warum es da ist, dann verschwindet es auf der Stelle und wird durch etwas noch Bizarreres und Unbegreiflicheres ersetzt.

Es gibt eine andere Theorie, nach der das schon passiert ist.

Douglas Adams *Das Restaurant am Ende des Universums*

Kapitel 1

Die Galileische Raumzeit

Um von einer Schrödingergleichung, oder genauer, von einer Wellenfunktion, die eine solche erfüllt, sprechen zu können, muß erklärt werden, welche mathematischen Objekte darunter zu verstehen sein sollen. Der übliche Zugang in einem einführenden Buch über Quantenmechanik besteht darin, den sogenannten „Ortsraum“ durch ein kartesiches Koordinatensystem $\mathbb{R}^3$ zu beschreiben und komplexwertige Funktionen von diesen drei Raum- und einer zusätzlichen Zeitvariablen zu betrachten, oder, ohne nähere Erläuterungen, einfach nur $\psi_{\mathrm{t}}(\vec{x})$ zu schreiben.
Im ersten Kapitel dieser Arbeit werden eine allgemeinere und präziesere Definition von Raumzeit und davon abgeleitete Begriffe diskutiert, die in den anschließenden Kapiteln als Grundlage für die Konstruktion von Wellenfunktionen und Schrödingergleichungen dienen werden.
Die mathematischen Hilfsmittel dafür kommen aus dem Gebiet der Differentialgeometrie. Falls nicht eigens gekennzeichnet, werden die hier nicht erklärten mathematischen Begriffe der Differentialgeometie verwendet, wie sie im Standardwerk [Kob1] definiert sind. Für eine kurze Einführung in das Themengebiet wird auf [Ish] verwiesen.

1.1 Definition einer Galileischen Mannigfaltigkeit

Der „nicht-relativistischen“, oder besser, „Galilei-relativistischen“ Quantenmechanik[1] und somit der Schrödingergleichung liegt das physikalische Konzept der Galileischen Raumzeit zugrunde. Eine mathematische Beschreibung der Galileischen Raumzeit erhält man mit dem Begriff einer **Galileischen Mannigfaltigkeit**.
Deren hier angeführte Definition stützt sich auf ähnliche Definitionen in [Dom], [Kün], [Loo1] und [Rot].

[1]In wie weit die „Galilei-relativistische“ Quantenmechanik und die Schrödingergleichung „Galilei-invariant“ sind, wird in Kapitel 2 untersucht werden.

Definition 1.1 (Galileische Mannigfaltigkeit) Ein Quadrupel (M, θ, g, ∇) heißt *Galileische Mannigfaltigkeit*, wenn es folgende Bedingungen erfüllt:

(1) M ist eine wegzusammenhängende, einfach zusammenhängende, parakompakte, 4-dimensionale Mannigfaltigkeit, deren zweite de-Rahmsche Kohomologiegruppe trivial ist ($H^2_{dR}(M) = 0$).

(2) θ ist eine geschlossene, nirgends verschwindende 1-Form auf M.

(3) g ist eine positiv definite Fasermetrik auf dem Untervektorbündel $R(M) := ker(\theta) \subseteq T(M)$ der raumartigen Tangentialvektoren bzgl. θ.

(4) ∇ ist ein krümmungs- und torsionsfreier linearer Zusammenhang auf M, der mit θ und g verträglich ist, d.h. $\nabla\theta = 0$ und ∇ ist metrisch, vgl.[Dom, p.296] und Seite 7 dieser Ausarbeitung.

Eine Galileische Mannigfaltigkeit (M, θ, g, ∇) heißt *vollständige Galileische Mannigfaltigkeit*, falls der lineare Zusammenhang ∇ vollständig ist.

Erläuterungen:

ad (1): Beim Begriff Mannigfaltigkeit, wie er hier nach [Kob1, p.2f] verwendet wird, ist eine andere topologische Eigenschaft von M schon eingebaut, nämlich wird gefordert, daß M ein *Hausdorffraum* ist. Die Plausibilität der topologischen Forderungen hausdorffsch, wegzusammenhängend und parakompakt sowie Beispiele von topologischen Räumen, die diese Eigenschaften nicht haben, werden in [Ger2, p.99ff] untersucht. An der selben Stelle findet sich auch eine Liste von äquivalenten Eigenschaften zur Parakompaktheit im Falle einer wegzusammenhängenden, hausdorffschen Mannigfaltigkeit, was den Begriff der Parakompaktheit in dem vorliegenden Fall etwas anschaulicher im Vergleich zu seiner üblichen Definition, vgl. z.B. [Jän, p.152], macht.
Dadurch, daß man M parakompakt und einfach zusammenhängend annimmt, wird außerdem der Umgang mit dem krümmungsfreien Zusammenhang und dem Rahmenbündel von M sehr vereinfacht, wie sich später zeigen wird. Insbesondere folgt, daß das Rahmenbündel von M trivial ist und somit M parallelisierbar und orientierbar ist, vgl. Seite 10.
Andererseits zeigen die Arbeiten von Geroch [Ger1, p.1743] und Marathe [Mar2], daß eine wegzusammenhängende, hausdorffsche Mannigfaltigkeit versehen mit einem linearen Zusammenhang schon parakompakt ist. **Die Parakompaktheit von M folgt also schon aus den anderen Forderungen an (M, θ, g, ∇).**
Da M einfach zusammenhängend ist, folgt weiters, daß die erste de-Rhamsche Kohomologiegruppe trivial ist ($H^1_{dR}(M) = 0$), vgl. dazu [Nak, p.201f Theorem 6.19] und [Kob1, p.284f. Factorization lemma]. Die Trivialität der ersten und zweiten de-Rhamschen Kohomologiegruppe führt zum üblichen Zusammenhang zwischen elektromagnetischem Feld, Potential und Umeichungsfunktion.

Manche Autoren fordern von M, homöomorph zum $\mathbb{R}^4$ zu sein. In diesem Fall sind die topologischen Forderungen in (1) offensichtlich erfüllt.
Schließlich stellt die Forderung an M, eine 4-dimensionale Mannigfaltigkeit zu sein, mathematisch keine notwendige Einschränkung dar, sondern ist rein physikalisch motiviert. Ohne weitere Schwierigkeiten könnte die vorliegende Arbeit auf $n+1$-dimensionale Galileische Mannigfaltigkeiten ($n \in \{1, 2, 3, ...\}$) umgeschrieben werden, die ansonsten dieselben Strukturen tragen. So sind etwa die ersten Sätze und Lemmata in dieser Allgemeinheit der Dimension von M gehalten.

ad (2): Da $H^1_{dR}(M) = 0$, sind die geschlossenen 1-Formen die exakten 1-Formen, wodurch garantiert wird, daß θ durch eine bis auf eine additive Konstante bestimmte Funktion t auf M geschrieben werden kann als $\theta = dt$. Eine solche Funktion t heißt *Zeitfunktion*. Da die sogenannte *Zeit-1-Form* θ außerdem nirgends verschwindet, liefert sie eine Blätterung von M. Die zugehörigen 3-dimensionalen Blätter heißen *instantane Räume* und sind die Nullstellengebilde einer Zeitfunktion t. Man erklärt für $x, y \in M$ die Äquivalenzrelation *gleichzeitig* durch $x \sim y :\Leftrightarrow$ x und y liegen im selben Blatt bezüglich $\theta \Leftrightarrow t(x) = t(y)$ für eine Zeitfunktion t. Der Quotientenraum $T := M/_\sim$ heißt *absolute Zeit*. Mit der kanonischen Projektion π_T zu $\sim$ bekommt man ein Faserbündel (M, π_T, T).

ad (3): Ein Tangentialvektor $v \in T(M)$ heißt *raumartig* bzgl. der Zeit-1-Form θ, falls $\theta(v) = 0 \Leftrightarrow v \in ker(\theta)$, und *zeitartig*, falls $\theta(v) \neq 0$. Das Bündel $R(M) := ker(\theta) \subseteq T(M)$ ist ein Untervektorbündel des Tangentialbündels von M. Die raumartigen Vektoren sind tangential an die durch θ definierten instantanen Räume $\Sigma \in T$.
Die positiv definite Fasermetrik g auf $R(M)$ mißt also Längen und Winkel nur innerhalb eines instantanen Raumes nicht aber in ganz M.

ad (4): In [Kob1, p.63] bezeichnet der Begriff „Zusammenhang (connection)“ eine bestimmte Zuweisung von horizontalen Unterräumen im Tangentialbündel eines Prinzipalfaserbündels und ∇ ist dort das Symbol für die vom Zusammenhang induzierte kovariante Ableitung. In dieser Arbeit wird für beide mathematische Objekte das Symbol ∇ verwendet, da sie in eineindeutiger Beziehung stehen.
Die Verträglichkeit des linearen Zusammenhanges ∇ mit den Strukturen θ und g bewirkt, daß der zu ∇ gehörende Paralleltransport von Tangentialvektoren die Strukturen θ und g invariant läßt, d.h. $\theta(Pt(v)) = \theta(v)$ für $v \in T_x(M)$ und $g(Pt(r), Pt(s)) = g(r, s)$ für $r, s \in R_x(M)$, $x \in M$, wobei Pt den Paralleltransport entlang einer bei x beginnenden Kurve in M bezeichnet. ∇ heißt vollständig (vgl.[Kob1, p.139]), falls der Definitionsbereich des affinen Parameters jeder Geodäte auf ganz $\mathbb{R}$ erweiterbar ist. Diese Eigenschaft garantiert in der klassischen Massenpunktmechanik, daß die Weltlinie eines freien Teilchens für alle Zeiten definiert ist.

1.2 Äquivalente Formulierungen

Satz 1.1 *Sei M eine Mannigfaltigkeit mit einer nirgends verschwindenden 1-Form θ und bezeichne $R(M) := ker(\theta)$ das Untervektorbündel der raumartigen Tangentialvektoren bzgl. θ. Dann gilt:*

> *Zu jeder positiv definiten Fasermetrik g auf $R(M)$ gibt es auf natürliche Weise genau eine symmetrische Bilinearform h auf $T^*(M)$ mit $h(\theta, .) = 0$ und Signatur $sign(h) = (0, 1, ..., 1)$.*

Wir beweisen zuerst das folgende

Lemma 1.1 *Für eine Mannigfaltigkeit M mit einer nirgends verschwindenden 1-Form θ gilt:*

> *Für alle $x \in M$ ist $R^*_x(M)$ kanonisch isomorph zu $T^*_x(M)/(\mathbb{R}\,\theta_x)$.*

Beweis.
Sei $x \in M$. Für alle $\alpha \in R^*_x(M)$ bezeichne $\bar{\alpha} \in T^*_x(M)$ eine Erweiterung von α, d.h. $\bar{\alpha} : T_x(M) \to \mathbb{R}$ linear und $\bar{\alpha}\,|_{R_x(M)}= \alpha$. Weiters sei $[\cdot] : T^*_x(M) \to T^*_x(M)/(\mathbb{R}\,\theta_x)$ die kanonische Projektion. Dann ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \phi_x : R^*_x(M) & \to & T^*_x(M)/(\mathbb{R}\,\theta_x) \\ \alpha & \mapsto & \phi_x(\alpha) := [\bar{\alpha}] \end{array}$$

der gewünschte Vektorraumisomorphismus.
Wohldefiniertheit: Sei $\tilde{\alpha}$ eine zweite Erweiterung von α und die Zeile $\underline{b} = (b_0, b)$ mit $b = (b_1, ..., b_n)$, $n + 1 := dim(M)$ eine an θ angepaßte Basis von $T_x(M)$, d.h. $\theta(b_0) = 1$ und $\theta(b_i) = 0$, $\forall i = 1, ..., n$. Sei weiters die Spalte $\underline{B} = \binom{B^0}{B}$ die zu $\underline{b}$ duale Basis. Es gilt $B^0 = \theta_x$ und $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(b_0)B^0 + \bar{\alpha}(b)B$, $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(b_0)B^0 + \tilde{\alpha}(b)B$ und somit

$$\tilde{\alpha} = \bar{\alpha} + (\tilde{\alpha}(b_0) - \bar{\alpha}(b_0))\theta_x \Leftrightarrow [\bar{\alpha}] = [\tilde{\alpha}].$$

Linearität: Verwende z.B. wiederum eine angepaßte Basis.
Bijektivität: Durch Angabe der Umkehrabbildung:

$$\begin{array}{rcl} \phi_x^{-1} : T^*_x(M)/(\mathbb{R}\,\theta_x) & \to & R^*_x(M) \\ [D] & \mapsto & \phi_x^{-1}([D]) = D|_{R_x(M)} \;. \quad \Box \end{array}$$

Beweis des Satzes.
Sei h wie im Satz. h faktorisiert zu einer positiv definiten Fasermetrik auf $T^*(M)/(\mathbb{R}\,\theta)$, da $h(\theta, .) = 0$ und $sign(h) = (0, 1, ..., 1)$. Mit Hilfe des Lemmas erhält man eine positiv definite Fasermetrik auf $R^*(M)$ und letztlich eine positiv definite Fasermetrik auf $R(M)$. Startet man umgekehrt mit einem g wie im Satz, so bekommt man analog eine

positiv definite Fasermetrik auf $T^*(M)/(\mathbb{R}\,\theta)$, die eindeutig durch Faktorisieren aus einem h hervorgeht, wenn man $h(\theta,.) := 0$ setzt. Die beschriebenen Zuordungen sind zueinander invers. $\square$

Im Folgenden zeigen wir, daß die Strukturen θ und g eine Reduktion des Rahmenbündels $L(M)$ induzieren und, daß umgekehrt jede geeignete Reduktion des Rahmenbündels eine Zeit-1-Form θ und eine Fasermetrik g auf dem Bündel der raumartigen Vektoren bzgl. θ bestimmt, sodaß die Konstruktionen zueinander invers sind.

Definition 1.2 Sei (M,θ,g) eine n+1-dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer nirgends verschwindenden 1-Form θ und einer positiv definiten Fasermetrik g auf $ker(\theta)$. Das *Galileibündel* $Gal(M)$ von (M,θ,g) ist die Menge der an θ und g angepaßten Elemente des Rahmenbündels $L(M)$.

$$Gal(M) := \{\underline{b} = (b_0, b) \in L(M) : \theta(b_0) = 1, \theta(b) = 0, g(b^t, b) = \mathbf{1}_n\},$$

wobei ^{t} Transponieren bedeutet, und $\mathbf{1}_n$ die $n \times n$ Einheitsmatrix ist. Die *homogene Galileigruppe* Γ_n von (M,θ,g) ist die Menge der Transformationsmatrizen zwischen zwei Elementen einer Faser von $Gal(M)$.

Aus der Definition von $Gal(M)$ ist klar, daß $Gal(M)$ ein reduziertes Bündel des Rahmenbündels $L(M)$ mit Strukturgruppe $\Gamma_n \subseteq Gl_{n+1}(\mathbb{R})$ ist. Eine einfache Rechnung zeigt, daß die homogene Galileigruppe

$$\Gamma_n = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & R \end{pmatrix} \in Gl_{n+1}(\mathbb{R}) : v \in \mathbb{R}^n(Spalten), R \in O(n)\}$$

ist und Dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ besitzt.
Genauer, vgl. [Kob1, p.53]: $(Gal(M), \pi, M, \Gamma_n) \hookrightarrow (L(M), \pi, M, Gl_{n+1}(\mathbb{R}))$ ist eine Reduktion der Strukturgruppe $Gl_{n+1}(\mathbb{R})$ von $(L(M), \pi, M, Gl_{n+1}(\mathbb{R}))$ auf Γ_n, wobei die Einschränkung der Projektion $\pi : L(M) \to M$ auf $Gal(M)$ wieder mit π bezeichnet wurde.

Satz 1.2 *Sei M eine n+1-dimensionale Mannigfaltigkeit und*

$$(P, \pi, M, \Gamma_n) \xrightarrow{f} (L(M), \pi, M, Gl_{n+1}(\mathbb{R})),$$

mit $f : \Gamma_n \hookrightarrow Gl_{n+1}(\mathbb{R})$ Inklusion, eine Reduktion der Strukturgruppe $Gl_{n+1}(\mathbb{R}))$ von $L(M)$ auf Γ_n. Dann lassen sich eine nirgends verschwindende 1-Form θ und eine positiv definite Fasermetrik g auf $ker(\theta)$ definieren, sodaß das Galileibündel $Gal(M)$ von (M,θ,g) gleich P ist. (Identifikation von P mit $f(P)$: (P,π,M,Γ_n) ist ein Unterbündel von $L(M)$ mit Strukturgruppe Γ_n)

Beweis.
Seien $x \in M$ beliebig, die Zeile $\underline{b} = (b_0, b)$ im Bild von f mit $\pi(\underline{b}) = x$ und die Spalte $\underline{B} = \binom{B^0}{B}$ die zu $\underline{b}$ duale Basis. Definiere $\theta_x := B^0$. $B^0(b_0) = 1$ garantiert, daß θ nirgends verschwindet.
Wohldefiniertheit: Sei $\underline{a} = (a_0, a)$ ebenfalls im Bild von f mit $\pi(\underline{a}) = x$ und die Spalte $\underline{A} = \binom{A^0}{A}$ die zu $\underline{a}$ duale Basis. Dann ist $\underline{a} = \underline{b} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & R \end{pmatrix}$ für geeignetes $v \in \mathbb{R}^n$ und $R \in O(n)$. Weiters gilt $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -R^{-1}v & R^{-1} \end{pmatrix} \underline{B}$, woraus $A^0 = B^0$ folgt.
Man definiert nun auf $ker(\theta)$ eine positiv definite Fasermetrik g, indem man die b von oben als orthonormal erklärt, was auf Grund der Transformation $a = bR$ durch eine orthogonale Matrix R wohldefiniert ist. □

Bemerkung: Satz 1.2 garantiert nicht, daß die durch die Reduktion des Rahmenbündels induzierte 1-Form θ geschlossen ist! Fordert man jedoch zusätzlich[2], daß auf M ein torsionsfreier linearer Zusammenhang definiert ist, der mit θ verträglich ist, so folgt aus der die Torsion betreffenden Strukturgleichung ([Kob1, p.121]), daß θ geschlossen ist. Da der Beweis dieser Behauptung noch etwas Vorarbeit braucht, wird er später nachgeholt (siehe Seite 9).

Als nächstes wird auf die Konsequenzen der Verträglichkeit von ∇ mit den Strukturen θ und g für die Formulierung mit $Gal(M)$ eingegangen.
Jeder lineare Zusammenhang ∇ auf einer Mannigfaltigkeit M ist gleichbedeutend mit einem Zusammenhang im Prinzipalfaserbündel $(L(M), \pi, M, Gl_{dim(M)}(\mathbb{R}))$, vgl.[Kob1, p.118ff, p.143]. Wir werden zeigen, daß die Verträglichkeit von ∇ dasselbe bedeutet, wie die Tatsache, daß ∇ reduzibel auf das Unterbündel $Gal(M)$ im Sinne von [Kob1, p.81] ist. Da ein Prinzipalfaserzusammenhang eindeutig durch seinen Paralleltransport im Prinzipalfaserbündel charakterisiert ist, genügt es für eine Richtung, zu zeigen, daß sich der Paralleltransport von ∇ in $L(M)$ auf Grund der Verträglichkeit auf $Gal(M)$ einschränken läßt, vergleiche dazu [Kob1, p.117 Proposition 1.5].

Satz 1.3 *Sei (M, θ, g, ∇) eine n+1-dimensionale Mannigfaltigkeit mit θ einer nirgends verschwindenden 1-Form, g einer positiv definiten Fasermetrik auf $ker(\theta)$ und ∇ einem linearen Zusammenhang auf M. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) ∇ ist verträglich mit θ und g, d.h. $\nabla\theta = 0$ und ∇ ist metrisch.

(2) ∇ ist reduzibel auf das Galileibündel $Gal(M)$ von (M, θ, g, ∇).

Beweis.
„(1)⇒(2)“: Wir zeigen zuerst, daß der von ∇ induzierte Paralleltransport Pt in $T(M)$

[2] Das ist insbesondere bei einer Galileischen Mannigfaltigkeit der Fall.

die Werte von θ stabilisiert. Sei $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\gamma : I \to M$ eine sich O.E.d.A. nicht schneidende Kurve in M mit $\dot\gamma(\lambda) \neq 0,\ \forall \lambda \in I$. Sei weiters $v \in T_{\gamma(a)}(M)$ und

$$\Phi : \gamma(I) \to T(M) : x \mapsto \Phi(x) \in T_x(M)$$

der durch den Paralleltransport von v entlang γ definierte Schnitt von $T(M)$, vgl. [Kob1, p.114]. Definiere

$$m : I \to \mathbb{R} : \lambda \mapsto m(\lambda) := \theta((\Phi \circ \gamma)(\lambda)).$$

Dann gilt $\dot m(\lambda) = \theta((\nabla_{\dot\gamma(\lambda)}\Phi)(\gamma(\lambda)) = 0$, weil ∇ mit der Kontraktion von Tensoren kommutiert (vgl.[Kob1, p.123]), nach Voraussetzung $\nabla\theta = 0$ und Φ nach Konstruktion parallel entlang γ ist. Also ist m konstant über I, was zu zeigen war.
Für ein mit θ verträgliches ∇ heißt ∇ metrisch, falls für alle raumartigen Vektorfelder X, Y auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq M$ und für alle Vektorfelder Z auf U gilt, daß

$$Zg(X,Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y). \tag{1.1}$$

Beachte, daß Gleichung (1.1) i.A. nicht wohldefiniert ist, falls $\nabla\theta = 0$ nicht verlangt wird. Verwende nun die Bezeichnungen von vorher, jedoch mit $v \in R_{\gamma(a)}(M)$, wähle noch einen zusätzlichen Tangentialvektor $w \in R_{\gamma(a)}(M)$, bezeichne mit $\Psi : \gamma(I) \to R(M) : x \mapsto \Psi(x) \in R_x(M)$ den durch den Paralleltransport von w entlang γ definierten Schnitt von $R(M)$ und definiere

$$n : I \to \mathbb{R} : \lambda \mapsto n(\lambda) := g((\Phi \circ \gamma)(\lambda)), (\Psi \circ \gamma)(\lambda)).$$

Mit analogen Argumenten zu vorher nach einer Erweiterung der Vektorfelder Φ und Ψ auf eine offene Menge U erhält man, daß n konstant ist, d.h. der Paralleltransport von raumartigen Tangentialvektoren stabilisiert die Werte von g.
Ergebnis: Nachdem der von ∇ induzierte Paralleltransport in $T(M)$ die Strukturen θ und g invariant läßt, ist die Einschränkung von $L(M) \to L(M) : \underline{e} = (e_0, ..., e_n) \mapsto (Pt(e_0), ..., Pt(e_n))$ auf $Gal(M) \to Gal(M) : \underline{b} = (b_0, ..., b_n) \mapsto (Pt(b_0), ..., Pt(b_n))$ möglich.

„(1)⇐(2)“: Wir beweisen zuerst noch das

Lemma 1.2 *Sei (M, θ, g, ∇) wie in Satz 1.3 und h die von g nach Satz 1.1 eindeutig induzierte symmetrische Bilinearform auf $T^*(M)$ mit $h(\theta, .) = 0$ und $sign(h) = (0, 1, ..., 1)$. Dann gilt:*

(1) In einem lokalen ($U \subseteq M$ offen), den Strukturen θ und g angepaßten Rahmen $\underline{b} : U \to L(M)$ ($\theta(b_0) = 0$ und $g(b^t, b) = \mathbf{1}_n$ auf ganz U) ist $\nabla\theta = 0$ äquivalent zu

$$(\underline{b}^*\omega)^0_\nu = 0,\ \forall \nu = 0, ..., n,$$

mit ω der zu ∇ gehörenden $Lie(Gl_{n+1}(\mathbb{R}))$-wertigen 1-Form auf $L(M)$, vgl.[Kob1, p.63,141].

(2) Unter der Annahme $\nabla\theta = 0$ gilt: ∇ metrisch $\Leftrightarrow \nabla h = 0$.

Beweis des Lemmas.
ad (1): Sei $\underline{b} : U \to L(M)$ ein lokaler, den Strukturen θ und g angepaßter Rahmen. Für $A := \underline{b}^*\omega$ gilt $\nabla\underline{b} = \underline{b}A$. Mit $\underline{B} = \binom{B^0}{B}$ dem dualen Rahmen zu $\underline{b}$ gilt weiters $\nabla\underline{B} = -A\underline{B}$. Ferner läßt sich θ lokal schreiben als $\theta = B^0$. Daraus folgt

$$0 = \nabla\theta = \nabla B^0 = (\nabla\underline{B})^0 = (-A\underline{B})^0 = -A^0_\nu B^\nu \Leftrightarrow A^0_\nu = 0,\ \forall\nu = 0,...,n. \quad \square$$

ad (2): Wir verwenden wieder einen lokalen, angepaßten Rahmen $\underline{b}$, da wiederum nur lokale Eigenschaften zu beweisen sind. Eine einfache Überlegung ergibt, daß sich h lokal als $h = \sum_{i=1}^n b_i \otimes b_i$ schreiben läßt. Somit hat man

$$\begin{aligned}
\nabla h = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^n \nabla b_i \otimes b_i + \sum_{i=1}^n b_i \otimes \nabla b_i = 0\\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{i,k=1}^n b_k \otimes b_i \otimes A^k_i + \sum_{i,k=1}^n b_i \otimes b_k \otimes A^k_i = 0\\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{i,k=1}^n b_k \otimes b_i \otimes (A^k_i + A^i_k) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad A^k_i = -A^i_k,\ \forall i,k = 1,...,n.
\end{aligned}$$

Seien andererseits X, Y lokal definierte, raumartige Vektorfelder. Definiere $\mathbb{R}^n$-wertige, lokal definierte Funktionen ξ und η durch $X =: b\xi, Y =: b\eta$. Wir bezeichnen die n×n matrixwertige 1-Form $(A^i_k)_{i,k=1,...,n}$ mit a und erhalten:

$$\begin{aligned}
d(g(X,Y)) &= d(\xi^t\eta)\\
&= d\xi^t\eta + \xi^t d\eta.\\
g(\nabla X, Y) &= g(b(a\xi + d\xi), b\eta)\\
&= \xi^t a^t \eta + d\xi^t\eta.\\
g(X, \nabla Y) &= g(b\xi, b(a\eta + d\eta))\\
&= \xi^t a\eta + \xi^t d\eta.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\nabla\text{metrisch} \quad &\Leftrightarrow \quad d(\xi^t\eta) - g(\nabla X, Y) - g(X, \nabla Y) = 0\\
&\qquad \forall X, Y \text{ raumartig}\\
&\Leftrightarrow \quad \xi^t(a^t + a)\eta = 0,\ \forall\xi,\eta\\
&\Leftrightarrow \quad a^t = -a\\
&\Leftrightarrow \quad A^k_i = -A^i_k, i,k = 1,...,n. \qquad \square
\end{aligned}$$

Zurück zum Beweis von Satz 1.3:
Sei nun ∇ reduzibel auf das Galileibündel von (M, θ, g, ∇). Das heißt, daß ∇ durch eine $Lie(\Gamma_n)$-wertige Zusammenhangs-1-Form ω auf $Gal(M)$ induziert wird. Die Liealgebra der homogenen Galileigruppe Γ_n ist aber die Menge aller Matrizen der Form $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \xi & a \end{pmatrix}, \xi \in \mathbb{R}^n, a \in Lie(O(n))$, d.h. $A^0_\nu = 0,\ \forall \nu = 0, ..., n$ und $a^t = -a$, was nach den Rechnung im Beweis des Lemmas 1.2 impliziert, daß $\nabla\theta = 0$ und ∇ metrisch. $\square$

Bemerkung: Auch die „(1)⇒(2)" Richtung des Satzes 1.3 hätte mit Hilfe der Äquivalenzen im Beweis des Lemmas 1.2 bewiesen werden können: Aus $\nabla\theta = 0$ und ∇ metrisch folgt, daß die Einschränkung von ω auf das Galileibündel $Lie(\Gamma_n)$-wertig ist, was äquivalent dazu ist, daß ω auf $L(M)$ reduzibel auf einen Zusammenhang in $Gal(M)$ ist, vgl. [Kob1, p.83 Remark].

Nun noch zum angekündigten Nachtrag.
Sei $Gal(M)$ durch eine Reduktion des Rahmenbündels wie im Satz 1.2 induziert. Sei zusätzlich auf M ein torsionsfreier linearer Zusammenhang definiert, der mit der durch die Reduktion des Rahmenbündels induzierten 1-Form $\theta = B^0$ verträglich ist. Aus Lemma 1.2 wissen wir, daß daher $A^0_\nu = 0,\ \forall \nu = 0, ..., n$. Nach einer Strukturgleichung (vgl.[Kob1, p.121]) gilt aber $dB^0 = -A^0_\nu \wedge B^\nu$ und somit $d\theta = 0$.

Folgerung 1.1 (Alternativ-Definiton 1 einer Galileischen Mannigfaltigkeit)
Zu jedem Quadrupel $(Gal(M), \pi, M, \nabla)$, das die folgenden Bedingungen erfüllt, gibt es genau eine (vollständige) Galileische Mannigfaltigkeit.

(1) M ist eine wegzusammenhängende, einfach zusammenhängende, parakompakte, 4-dimensionale Mannigfaltigkeit, deren zweite de-Rahmsche Kohomologiegruppe trivial ist ($H^2_{dR}(M) = 0$).

(2) Das Tripel $(Gal(M), \pi, M)$ ist ein reduziertes Bündel des Rahmenbündels $L(M)$ von M mit Strukturgruppe $\Gamma := \Gamma_3$.

(3) ∇ ist ein (vollständiger), krümmungs- und torsionsfreier, linearer Zusammenhang auf M, der reduzibel auf $Gal(M)$ ist, also von einer $Lie(\Gamma)$-wertigen Zusammenhangs-1-Form ω auf $Gal(M)$ herrührt.

Umgekehrt liefert jede (vollständige) Galileische Mannigfaltigkeit (M, θ, g, ∇) ein Quadrupel $(Gal(M), \pi, M, \nabla)$, das diese Bedingungen erfüllt. Die Zuordnungen sind zueinander invers.

Daher wird im folgenden der Begriff „(vollständige) Galileische Mannigfaltigkeit" auch für Quadrupel $(Gal(M), \pi, M, \nabla)$ mit den beschriebenen Eigenschaften verwendet.

1.3 Inertiale Rahmen und inertiale Karten

In diesem Kapitel geht es darum, die einer Galileischen Mannigfaltigkeit am besten angepaßten[3] Rahmen und Karten zu finden, welche dann per definitionem „inertial" genannt werden. Der Begriff „Karte einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit", wie wir ihn in der vorliegenden Arbeit verwenden, wird auf Seite 17 äquivalent zu [Kob1, p.2f] erklärt.
Für ein verbessertes Verständnis des Folgenden wird auf [Kob1, p.71ff Chapter 4 (Holonomy groups), p.79ff Chapter 6 (Mappings of Connections), p.83f Reduction Theorem, p.81 Theorem 8.1 und p.92f Corollary 9.2] verwiesen. Der letzte Hinweis wird hier ohne Beweis wiedergegeben.

Satz 1.4 *Sei ∇ ein Zusammenhang in einem Prinzipalfaserbündel (P, π, M, G), sodaß die Krümmung identisch verschwindet. Falls M parakompakt und einfach zusammenhängend ist, dann ist (P, π, M, G) isomorph zum trivialen Bündel $(M \times G, pr_1, M, G)$ und der Zusammenhang ∇ in P isomorph zum kanonischen flachen Zusammenhang in $M \times G$.*

Die Voraussetzungen des Satzes 1.4 treffen auf eine Galileische Mannigfaltigkeit $(Gal(M), \pi, M, \nabla)$ zu. Es gibt daher einen Prinzipalfaserisomorphismus

$$\Phi : M \times \Gamma \to Gal(M) \, mit \, \pi \circ \Phi = pr_1,$$

der die horizontalen Unterräume von $T(M \times \Gamma)$ in die horizontalen Unterräume von $T(Gal(M))$ abbildet. Beim kanonischen flachen Zusammenhang in $M \times \Gamma$ sind die horizontalen Unterräume die Tangentialräume an die Untermannigfaltigkeiten $M \times \{a\}, a \in \Gamma$.
Konstruiere nun folgendermaßen globale parallele Schnitte von $Gal(M)$.
Für $a \in \Gamma$ definiere $\sigma^a : M \to M \times \Gamma : \sigma^a(x) := (x, a)$. Der Schnitt σ^a ist dann ein globaler paralleler Schnitt von $M \times \Gamma \to M$. Da Φ die Zusammenhänge ineinander abbildet, ist $\underline{b} := \Phi \circ \sigma^a$ (Zeile) ein globaler paralleler Schnitt von $Gal(M) \xrightarrow{\pi} M$. Mit $A := \underline{b}^* \omega$, ω die Zusammenhangs-1-Form auf $Gal(M)$, gilt daher

$$0 = \nabla \underline{b} = \underline{b} A \Leftrightarrow A = 0.$$

Verwende nun die Torsionsfreiheit von ∇.
Sei $\underline{B}$ wie immer die Spalte des zu $\underline{b}$ dualen Rahmens. Mit der schon früher verwendeten Strukturgleichung folgt

$$0 = dB^\nu + A^\nu_\mu \wedge B^\mu = dB^\nu, \; \forall \nu = 0, ..., 3.$$

[3] d.h. die induzierten (lokalen) Zusammenhangs-1-Formen zu ∇ auf M verschwinden, und θ und g lassen sich einfach darstellen.

Aus der Definition einer Galileischen Mannigfaltigkeit folgt, daß $H^1_{dR}(M) = 0$, vgl. Seite 2 dieser Ausarbeitung. Es gibt also vier, bis auf additive Konstanten eindeutig bestimmte, reellwertige Funktionen f^ν auf M mit $df^\nu = B^\nu$, $\forall \nu = 0, ..., 3$.

ACHTUNG: Es ist im Allgemeinen falsch, zu folgern, daß $f := (f^0, f^1, f^2, f^3)^t$ eine globale Karte von M ist. Aus der linearen Unabhängigkeit der $d_x f^\nu$, $x \in M$ folgt nur, daß es zu jedem Punkt $x \in M$ eine Einschränkung von f auf eine offene Umgebung von x gibt, die ein Diffeomorphismus auf eine offenen Menge des $\mathbb{R}^4$ ist!

BEISPIEL: Verwende als Galileische Mannigfaltigkeit $(\mathbb{R}^4, \theta, g, \nabla)$, wobei die Strukturen θ, g und ∇ folgendermaßen definiert sind:
Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathbb{R}^4 & \rightarrow & \mathbb{R}^4 \\ y = (y^0, ..., y^3)^t & \mapsto & \phi(y) := (e^{y^0} \cos(y^1), e^{y^0} \sin(y^1), y^2, y^3)^t \end{array}$$

ist weder surjektiv noch injektiv, aber das Differential $d_y\phi$ ist an jeder Stelle $y \in \mathbb{R}^4$ invertierbar, vgl. [Heu, p.301]. Definiere θ und g durch $\theta := \phi^* dx^0$ und $g := \phi^* \langle ., . \rangle$, mit x^0 der Projektion auf die nullte Komponente in $\mathbb{R}^4$ und $\langle ., . \rangle$ der Standardfasermetrik auf der Vereinigung der $T(\{y^0\} \times \mathbb{R}^3) \cong \mathbb{R}^3$, $y^0 \in \mathbb{R}$. Definiere mit ϕ aus dem Standardzusammenhang auf $\mathbb{R}^4$ (Identifikation der $T_y(\mathbb{R}^4)$ mit $\mathbb{R}^4$ und Paralleltransport gleich Identität auf $\mathbb{R}^4$) einen neuen Zusammenhang ∇ auf $\mathbb{R}^4$, vgl.[Kob1, 81].
Eine Funktion f von oben ist nun aber, vgl. Satz 1.5, bis auf eine inhomogene Galileitransformation $f = \gamma\phi + a$, $\gamma \in \Gamma, a \in \mathbb{R}^4$ gleich ϕ. Zwar ist f überall ein lokaler Diffeomorphismus, aber kein globaler, kann also nicht als Karte verwendet werden. Beachte, daß ∇ nicht vollständig ist.

Definition 1.3 (inertiale Rahmen) Die globalen parallelen Rahmen von $Gal(M)$ $\underline{b} : M \rightarrow Gal(M)$, $\quad \underline{b}^*\omega = 0$ heißen *inertiale Rahmen.*

Definition 1.4 (inertiale Karten) Die durch Einschränkung der Funktionen f auf offene Mengen $U \subseteq M$ entstehenden Karten (φ, U), $\varphi := f|_U$ heißen *inertiale Karten.*

Satz 1.5 *Zwei inertiale Rahmen $\underline{b}_{(1)}$ und $\underline{b}_{(2)}$ sind durch eine homogene Galileitransformation verknüpft, und zwei inertiale Karten (φ_1, U_1) und (φ_2, U_2) sind durch eine inhomogene Galileitransformation verknüpft, d.h.*

$$\begin{array}{rcl} \underline{b}_{(2)} & = & \underline{b}_{(1)}\gamma, \ \gamma \in \Gamma \\ \varphi_1 & = & \gamma\varphi_2 + a \ \ \mathit{auf} \ U_1 \cap U_2 \ \ \mathit{mit} \ \gamma \in \Gamma, a \in \mathbb{R}^4. \end{array}$$

Beweis. Da die horizontalen Unterräume in $T(Gal(M))$ invariant bezüglich der Rechtsoperation von Γ sind [Kob1, p.63], entstehen aus einem inertialen Rahmen $\underline{b}_{(1)}$

durch $\underline{b}_{(2)} := \underline{b}_{(1)}\gamma, \gamma \in \Gamma$ alle inertialen Rahmen. Die dazu dualen Rahmen $\underline{B}_{(1)}$ und $\underline{B}_{(2)}$ transformieren mit $\underline{B}_{(2)} = \gamma^{-1}\underline{B}_{(1)}$. Wir haben $df_{(i)} = \underline{B}_{(i)}$, $i = 1, 2$ nach Definition der $f_{(i)}$ und somit $df_{(2)} = \gamma^{-1}df_{(1)} \Leftrightarrow df_{(1)} - \gamma df_{(2)} = d(f_{(1)} - \gamma f_{(2)}) = 0 \Leftrightarrow$($M$ ist zusammenhängend) $f_{(1)} = \gamma f_{(2)} + a$, $a \in \mathbb{R}$. □

1.4 Die Automorphismengruppe einer Galileischen Mannigfaltigkeit

Definition 1.5 (Automorphismengruppe) Sei (M, θ, g, ∇) eine Galileische Mannigfaltigkeit. Die Menge $\mathcal{A}(M, \theta, g, \nabla) \subset Diff(M)$ der Diffeomorphismen von M auf sich selber, die die Strukturen θ, g und ∇ erhalten, heißt die *Automorphismengruppe* von (M, θ, g, ∇).

$$\mathcal{A}(M, \theta, g, \nabla) := \{f \in Diff(M) \mid f^*\theta = \theta, f^*g = g, \tilde{f}^*\omega = \omega\}$$

mit ω der zu ∇ gehörenden $Lie(Gl_{n+1}(\mathbb{R}))$-wertigen 1-Form auf $L(M)$ und

$$\begin{aligned} \tilde{f} : L(M) &\to L(M) \\ \underline{b} = (b_0, ..., b_3) &\mapsto \tilde{f}(\underline{b}) := (Tf(b_0), ..., Tf(b_3)) \end{aligned}$$

der von f induzierte Bündelautomorphismus von $L(M)$.

Die Bedingungen $f^*\theta = \theta$ und $f^*g = g$ sind äquivalent dazu, daß sich $\tilde{f}$ auf $Gal(M)$ einschränken läßt. Diffeomorphismen f, die $\tilde{f}^*\omega = \omega$ erfüllen, bilden mit $\tilde{f}$ die horizontalen Unterräume von $T(Gal(M))$ auf sich selber ab und heißen in [Kob1, p.226f] affine Transformationen. Die Automorphismen $f \in \mathcal{A}(M, \theta, g, \nabla)$ sind also die affinen Transformationen von M, deren $\tilde{f}$ sich auf $Gal(M)$ einschränken läßt, oder, anders ausgedrückt, die Menge $\mathcal{A}(M, \theta, g, \nabla)$ steht bijektiv in Verbindung mit der Menge der Automorphismen des Galileibündels $Gal(M)$, die den Zusammenhang in $Gal(M)$ und die kanonische 1-Form auf $Gal(M)$ invariant lassen, vgl. [Kob1, Proposition 1.3, p.226].

Definition 1.6 (infinitesimaler Automorphismus) Sei durch (M, θ, g, ∇) eine Galileische Mannigfaltigkeit gegeben. Ein Vektorfeld X auf M heißt *infinitesimaler Automorphismus*, falls für alle $x \in M$ der lokale Fluß $\varphi_t^X : U \to M, t \in (-\epsilon_x, \epsilon_x), \epsilon_x > 0$ von einer offenen Umgebung U von x nach M die Strukturen θ, g und ∇ erhält, d.h. für alle $t \in (-\epsilon_x, \epsilon_x)$ gilt

$$(\varphi_t^X)^*\theta = \theta|_U,\ (\varphi_t^X)^*g = g|_U \ \text{ und } (\widetilde{\varphi_t^X})^*\omega = \omega|_{Gal(U)}\ .$$

wobei $Gal(U)$ die Einschränkung von $Gal(M)$ auf U ist. (vgl.[Kob1, p.230], [Loo1, p.15], [Loo2, p.283])

Sei $a(M, \theta, g, \nabla)$ die Menge aller infinitesimaler Automorphismen von (M, θ, g, ∇). Dann ist $a(M, \theta, g, \nabla)$ eine Unteralgebra der Liealgebra der Vektorfelder auf M. Die Liealgebra von $\mathcal{A}(M, \theta, g, \nabla)$ ist die Unteralgebra von $a(M, \theta, g, \nabla)$, bestehend aus den vollständigen Vektorfeldern, vgl. [Kob1, p.13,p.232,p.235], [Loo1, p.16], [Loo2, p.283].

Satz 1.6 *Sei (M, θ, g, ∇) eine Galileische Mannigfaltigkeit. Dann gilt, daß die Dimension von $a(M, \theta, g, \nabla)$ höchstens 10 ist.*

Beweis. Es läßt sich der Beweis des Theorems 2.3 in [Kob1, p.232] übernehmen, man muß nur $L(M)$ durch $Gal(M)$ ersetzen und verwenden, daß $dim(Gal(M)) = 10$. Vergleiche auch [Loo2, p.284 Theorem 2] oder [Loo1, p.14]. $\square$

Im nächsten Kapitel werden wir sehen, daß sich für vollständige Galileische Mannigfaltigkeiten alles sehr vereinfacht. Insbesondere folgt $dim(\mathcal{A}(M, \theta, g, \nabla)) = 10$.

1.5 Vollständige Galileische Mannigfaltigkeiten

Satz 1.7 *Eine vollständige Galileische Mannigfaltigkeit (M, θ, g, ∇) besitzt globale inertiale Karten, die alle M diffeomorph auf $\mathbb{R}^4$ abbilden.*

Beweis.
Variante 1: Sei (M, θ, g, ∇) eine vollständige Galileische Mannigfaltigkeit und $f = (f^0, f^1, f^2, f^3)^t$ eine Funktion auf M wie im Abschnitt 1.3. Wir zeigen, daß $f : M \to \mathbb{R}^4$ ein Diffeomorphismus ist. Wähle ein beliebiges $\nu \in \{0, ..., 3\}$, einen Punkt $x \in M$ und $v \in T_x(M)$ mit $d_x f^\nu(v) = 1$. Es gibt genau eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Geodäte $\gamma : \mathbb{R} \to M : \lambda \mapsto \gamma(\lambda)$, $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$ mit $\gamma(0) = x$ und $\dot\gamma(0) = v$. Auf Grund der Parallelität von df^ν und $\dot\gamma$ gilt $d_{\gamma(\lambda)} f^\nu(\dot\gamma(\lambda)) = 1$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Nun ist aber $d_{\gamma(\lambda)} f^\nu(\dot\gamma(\lambda)) = d_\lambda(f^\nu \circ \gamma)(1) = (f^\nu \circ \gamma)'(\lambda)$ und daher $(f^\nu \circ \gamma)(\lambda) = \lambda + c$, $c \in \mathbb{R}$, wodurch die Surjektivität von f gezeigt ist. Nun zur Injektivität.
Annahme: Es gibt zwei verschieden Punkte $x, y \in M, x \neq y$ mit $f(x) = f(y)$. Aus $df^0 = \theta$ folgt, daß f^0 einen Zeitfunktion ist. Die Punkte x und y liegen daher im selben instantanen Raum Σ, sind also gleichzeitig. Da ∇ metrisch und torsionsfrei ist, ist die Einschränkung von ∇ auf Σ gerade der Levi-Cività Zusammenhang auf Σ zu $g\,|_\Sigma$. Nach Theorem 4.2 in [Kob1, p.172] können x und y mit einer minimierenden Geodäte $\gamma : [a, b] \to M$ verbunden werden, wobei $a \neq b$ da $x \neq y$, $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$ und $\dot\gamma(a) \neq 0$ ebenfalls weil $x \neq y$. Da die $d_x f^i$, $i = 1, 2, 3$ eine Basis in $R_x(M) = T_x(\Sigma)$ bilden, gibt es ein $i \in \{1, 2, 3\}$ mit $d_x f^i(\dot\gamma(a)) =: k \neq 0$. Analog zu vorher erhält man $f^i(y) - f^i(x) = k(b - a) \neq 0$, im Widerspruch zu $f(x) = f(y)$. $\square$

Variante 2: Sei (M, θ, g, ∇) eine vollständige Galileische Mannigfaltigkeit und f eine Funktion wie im Abschnitt 1.3. Sei weiters $(\mathbb{R}^4, dx^0, \langle ., . \rangle, \nabla_{st.})$ die Standardstruktur einer Galileischen Mannigfaltigkeit auf $\mathbb{R}^4$, d.h. x^0 die Projektion auf die

nullte Komponente in $\mathbb{R}^4$, $\langle .,. \rangle$ das Standardskalarprodukt auf der Vereinigung der $T(\{y^0\} \times \mathbb{R}^3) \cong \mathbb{R}^3$, $y^0 \in \mathbb{R}$ und $\nabla_{st.}$ der Standardzusammenhang auf $\mathbb{R}^4$ (Identifikation der $T_y(\mathbb{R}^4)$ mit $\mathbb{R}^4$ und Paralleltransport gleich Identität auf $\mathbb{R}^4$). Sei $x \in M$, dann ist $T_x f : T_x(M) \to T_{f(x)}(\mathbb{R}^4)$ ein linearer Isomorphismus der trivialerweise den Krümmungs- und den Torsionstensor von M bei x in den Krümmungs- und den Torsionstensor von $\mathbb{R}^4$ bei $y := f(x)$ abbildet, da die angesprochenen Tensoren alle null sind. Aus demselben Grund sind diese Tensoren auch parallel bezüglich den jeweiligen Zusammenhängen. Weiters ist sowohl M als auch $\mathbb{R}^4$ zusammenhängend und einfach zusammenhängend, und die Zusammenhänge ∇ und $\nabla_{st.}$ sind vollständig. Daher läßt sich das Theorem 7.8 aus [Kob1, p.265] anwenden, das besagt, daß es einen eindeutigen affinen Diffeomorphismus $\varphi : M \to \mathbb{R}^4$ gibt, mit $\varphi(x) = f(x) = y$ und $T_x\varphi = T_x f$. Affiner Diffeomorphismus bedeutet, daß $\omega = \tilde{\varphi}^*\omega_{st.}$, wobei ω die zu ∇ gehörende $Lie(Gl_4(\mathbb{R}))$-wertige 1-Form auf $L(M)$ ist, entsprechend für $\omega_{st.}$, und $\tilde{\varphi}$ der von φ induzierte Bündelisomorphismus von $L(M)$ nach $L(\mathbb{R}^4)$ ist, vgl. Seite 12.
Der lineare Isomorphismus $T_x\varphi = T_x f$ transportiert auch die Strukturen θ_x und g_x in die entsprechenden bei $T_y(\mathbb{R}^4)$: $(\varphi^* dx^0)_x = \theta_x$ und $(\varphi^*\langle .,. \rangle)_x = g_x$. Definiere auf M die 1-Form $\alpha := \theta - \varphi^*(dx^0)$ und die symmetrische Bilinearform $\beta := h - \varphi^* h_{st.}$ auf $T^*(M)$, wobei h bzw. $h_{st.}$ eindeutig von g bzw. $\langle .,. \rangle$ induziert sind, vgl. Satz 1.1. Es gilt $\nabla\alpha = \nabla\theta - \nabla\varphi^*(dx^0) = 0 - \varphi^*(\nabla_{st.} dx^0) = 0$ und $\nabla\beta = \nabla h - \nabla(\varphi^* h_{st.}) = 0 - \varphi^*(\nabla_{st.} h_{st.}) = 0$. Das heißt, α und β sind jeweils parallel. Nachdem sie bei x null sind und der Paralleltransport zwischen zwei Fasern eine lineare Abbildung ist, folgt, daß α und β überall null sind, also $\theta = \varphi^*(dx^0)$ und $h = \varphi^* h_{st.}$. Das bedeutet, daß der Diffeomorphismus φ die Strukturen (M, θ, g, ∇) in die Strukturen $(\mathbb{R}^4, dx^0, < .,. >, \nabla_{st.})$ abbildet.
Nun stimmen aber φ und f überein, da ihre Differentiale in x übereinstimmen, beide durch df bzw. $d\varphi$ einen globalen, angepaßten Dualrahmen von M definieren und $\varphi(x) = f(x) = y$ gilt, vgl. den Beweis zu Satz 1.5. Somit ist $f = \varphi$ eine globale Karte von M, die M diffeomorph auf $\mathbb{R}^4$ abbildet. □

Bemerkung: In Variante 2 hätte von der globalen Existenz der Funktion f nicht Gebrauch gemacht werden müssen, die allerdings aus M einfach zusammenhängend folgt. Nach dem Lemma von Poincaré gibt es immer eine Umgebung U von x in M und ein $f : U \to \mathbb{R}^4$, sodaß $\underline{B}|_U = df$. Dieses f hätte dieselben Dienste geleistet. Mit dem Ende des Beweises folgt jedoch, daß $H^n_{dR}(M) = 0$, $\forall n \in \{1, 2, 3, ...\}$, da ja bewiesen wurde, daß M diffeomorph zum $\mathbb{R}^4$ ist und somit alle de-Rahmschen Kohomologiegruppen verschwinden, vgl. [Gui, p.181]. Die Parakompaktheit von M wurde ebenfalls nicht verwendet, sie folgt aber mit M diffeomorph zum $\mathbb{R}^4$.
Somit müsste man in der Definition einer vollständigen Galileischen Mannigfaltigkeit $H^2_{dR}(M) = 0$, sowie M parakompakt nicht eigens fordern.

Wir berechnen nun die Automorphismengruppe einer vollständigen Galileischen Mannigfaltigkeit.
Sei also $f : M \to M$ aus der Automorphismengruppe einer vollständigen Galileischen Mannigfaltigkeit (M, θ, g, ∇). Wir verwenden eine globale inertiale Karte $\varphi : M \to \mathbb{R}^4$ und bezeichnen mit $\underline{\partial}^\varphi = (\partial_0^\varphi, \partial_1^\varphi, \partial_2^\varphi, \partial_3^\varphi)$ den induzierten inertialen Rahmen. Mit $\tilde{f}$ bezeichnen wir wieder den von f induzierten Bündelautomorphismus auf $L(M)$. Daß $\tilde{f}$ die Zusammenhangs-1-Form ω von ∇ auf $L(M)$ invariant läßt und sich auf $Gal(M)$ einschränken läßt, ist äquivalent dazu, daß der mit $\tilde{f}$ und f verschobene Rahmen wieder inertial ist, also sich nach Satz 1.5 nur um eine homogene Galileitransformation unterscheiden:

$$\tilde{f} \circ \underline{\partial}^\varphi \circ f^{-1} = \underline{\partial}^\varphi \gamma \quad \text{mit} \quad \gamma \in \Gamma$$

Es gilt außerdem $\tilde{f} \circ \underline{\partial}^\varphi = (\underline{\partial}^\varphi \circ f)(f'_\varphi \circ \varphi)$, wobei $f_\varphi := \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ den Kartenausdruck von f und $f'_\varphi(\xi)$ die Jacobimatrix von f bei $\xi \in \mathbb{R}^4$ bezeichnet. Das führt auf

$$\tilde{f} \circ \underline{\partial}^\varphi \circ f^{-1} = \underline{\partial}^\varphi (f'_\varphi \circ \varphi \circ f^{-1}).$$

Insgesamt gilt daher $f'_\varphi(\xi) = \gamma$ für ein $\gamma \in \Gamma$ und für alle $\xi \in \mathbb{R}^4$. Es folgt, daß der Kartenausdruck f_φ von f folgendermaßen ausschauen muß:

$$f_\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ f_\varphi(\xi) = \gamma\xi + a \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}^4. \tag{1.2}$$

Wie immer wird dabei der $\mathbb{R}^4$ als Spaltenraum aufgefaßt. Andererseits sind *alle* Abbildungen $f : M \to M$, deren Kartenausdruck in einer globalen inertialen Karte von der Form (1.2) sind, offensichtlich Automorphismen von (M, θ, g, ∇). Diese Ergebnisse führen zum

Satz 1.8 *Sei* (M, θ, g, ∇) *eine vollständige Galileische Mannigfaltigkeit. Die Automorphismengruppe* $\mathcal{A}(M, \theta, g, \nabla)$ *hat Dimension 10 und ist isomorph zur inhomogenen Galileigruppe. Weiters ist* $a(M, \theta, g, \nabla) = Lie(\mathcal{A}(M, \theta, g, \nabla))$ *und hat ebenfalls maximale Dimension 10.*

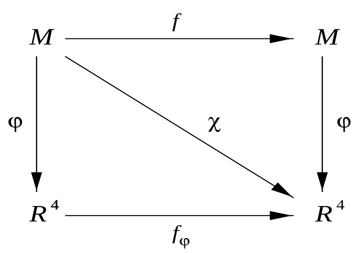

Abbildung 1.1: Automorphismus f und globale inertiale Karten φ und χ

Mit Hilfe der Automorphismen $f \in \mathcal{A}(M, \theta, g, \nabla)$ lassen sich aus einer globalen inertialen Karte $\varphi : M \to \mathbb{R}^4$ neue globale inertiale Karten χ durch $\chi := \varphi \circ f$ definieren. Denn ein so definiertes χ unterscheidet sich nur durch eine inhomogene Galileitransformation f_φ von φ, $\chi = f_\varphi \circ \varphi$, vgl. Beweis zu Satz 1.5. Mit dieser Konstruktion erhält man alle globalen inertialen Karten von M. Umgekehrt unterscheiden sich zwei globale inertiale Karten φ und χ immer durch einen Automorphismus $f := \varphi^{-1} \circ \chi$, da der Kartenausdruck des so definierten f in der Karte φ gerade wieder eine inhomogene Galileitransformation ist, vgl. wieder Beweis zu Satz 1.5. Man erhält nun alle Automorphismen. In Abbildung 1.1 sind die angesprochenen Zusammenhänge durch ein kommutatives Diagramm wiedergegeben.

1.6 Charakterisierung durch eine Υ-Struktur

Definition 1.7 (Pseudogruppe) Eine *Pseudogruppe* Υ auf $\mathbb{R}^n$ ist eine Menge von Abbildungen mit den Eigenschaften

(1) Jedes $g \in \Upsilon$ ist ein Diffeomorphismus einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ auf eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$, wobei $\mathbb{R}^n$ die gewöhnliche[4] Topologie trägt.

(2) Falls $g \in \Upsilon$, dann ist auch $g^{-1} \in \Upsilon$.

(3) Falls $g \in \Upsilon$ U auf V abbildet und $g' \in \Upsilon$ U' auf V' abbildet, dann ist die Abbildung $g' \circ g : g^{-1}(V \cap U') \to g'(V \cap U')$ wieder in Υ enthalten.

Beispiele.
Die Menge der **inhomogenen Galileitransformationen** Υ_{Gal} des $\mathbb{R}^4$

$$\Upsilon_{Gal} := \{g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4\,,\, g(\xi) = \gamma\xi + a :\ \gamma \in \Gamma,\, a \in \mathbb{R}^4\}$$

bildet eine Pseudogruppe, sowie

$$\Upsilon_{gal} := \{f : U \to f(U) :\ U \subseteq \mathbb{R}^4 \,\text{offen}\,,\, f = g|_U\ \text{ für ein}\, g \in \Upsilon_{Gal}\},$$

die Menge der **lokalen inhomogenen Galileitransformationen** des $\mathbb{R}^4$. Weiters sind die Diffeomorphismen des $\mathbb{R}^n$, die linearen, die projektiven und die affinen Abbildungen des $\mathbb{R}^n$, bzw. die Einschränkungen der angeführten Abbildungen auf offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ Pseudogruppen.

Erinnerung (vgl.[Kob1, p.2f]):
Eine Karte einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M ist ein Paar (U, φ), wobei φ ein

[4] i.e. die durch den euklidischen Abstand induzierte Topologie

Homöomorphismus einer offenen Menge $U \subseteq M$ in eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist. Zwei Karten (U, φ) und (U', φ') von M heißen verträglich, falls die Übergangsfunktion

$$\varphi' \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U') \to \varphi'(U \cap U')$$

ein Diffeomorphismus ist. Ein **Atlas** von M ist eine Menge $\mathcal{A} = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ von Karten von M, sodaß je zwei Karten von $\mathcal{A}$ verträglich sind und $M = \bigcup U_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ gilt.

Definition 1.8 (Υ-Struktur) Eine Υ-*Struktur* auf einer Mannigfaltigkeit M ist ein Atlas $\mathcal{A}_\Upsilon$ von M, wobei die Übergangsfunktion von je zwei Karten aus $\mathcal{A}_\Upsilon$ in Υ liegt.

Satz 1.9 *Sei M eine wegzusammenhängende, einfach zusammenhängende, parakompakte, 4-dimensionale Mannigfaltigkeit, deren zweite de-Rahmsche Kohomologiegruppe trivial ist. Dann induziert jede Erweiterung von M zu einer Galileischen Mannigfaltigkeit (M, θ, g, ∇) auf kanonische Weise eine Υ_{gal}-Struktur $\mathcal{A}_{\Upsilon_{gal}}(M, \theta, g, \nabla)$ auf M. Umgekehrt, jede Υ_{gal}-Struktur $\mathcal{A}_{\Upsilon_{gal}}$ auf M induziert die Struktur einer Galileischen Mannigfaltigkeit (M, θ, g, ∇), sodaß deren kanonische Υ_{gal}-Struktur die Karten aus $\mathcal{A}_{\Upsilon_{gal}}$ enthält. Die entsprechenden Aussagen gelten, wenn man vollständige Galileische Mannigfaltigkeiten und Υ_{Gal}-Strukturen betrachtet.*

Beweis.
Sei (M, θ, g, ∇) eine Galileische Mannigfaltigkeit. Die Menge

$$\mathcal{A}_{inertial} := \{(U, \varphi) : (U, \varphi) \text{ ist inertiale Karte von } (M, \theta, g, \nabla)\}$$

ist ein Atlas von M. Denn zu jedem Punkt $x \in M$ gibt es nach dem Umkehrsatz eine offene Umgebung U, sodaß die Einschränkung einer Funktion f aus Abschnitt 1.3 auf U ein Diffeomorphismus auf $f(U) \subseteq \mathbb{R}^4$ ist. Die offenen Mengen U überdecken daher ganz M. Weiters ist die Übergangsfunktion zweier inertialer Karten nach Satz 1.5 in Υ_{gal} enthalten. Somit erhalten wir durch

$$\mathcal{A}_{\Upsilon_{gal}}(M, \theta, g, \nabla) := \mathcal{A}_{inertial}$$

eine Υ_{gal}-Struktur auf M.
Sei umgekehrt eine Υ_{gal}-Struktur $\mathcal{A}_{\Upsilon_{gal}}$ auf einem M, das die geforderten topologischen Eigenschaften erfüllt, gegeben. Wir definieren die Struktur (M, θ, g, ∇) einer Galileischen Mannigfaltigkeit auf M. Für alle $x_0 \in M$ gibt es ein $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_{\Upsilon_{gal}}$ mit $x_0 \in U$. Sei $\underline{\partial}^\varphi = (\partial_0^\varphi, \partial_1^\varphi, \partial_2^\varphi, \partial_3^\varphi) : \varphi(U) \to L(U)$ der von der Karte (U, φ) induzierte Schnitt des Rahmenbündels über U. Für $x \in U$ definiere $\theta_x := d_x\varphi^0$, wobei $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)^t$, und g_x, indem $\partial_1^\varphi(x), \partial_2^\varphi(x)$ und $\partial_3^\varphi(x) \in ker(\theta_x)$ zu othonormalen Vektoren erklärt werden. Mit ω werde die zu ∇ gehörige, $Lie(Gl_4(\mathbb{R}))$-wertige 1-Form auf $L(M)$ bezeichnet. Definiere $\omega|_{L(U)}$ durch $(\underline{\partial}^\varphi)^*(\omega|_{L(U)}) := 0$, d.h. der lokale Rahmen $\underline{\partial}^\varphi$ über U

ist per Definition parallel: $\nabla\underline{\partial}^\varphi := 0$. Daß die Objekte θ, g und ∇ wohldefiniert sind, liegt daran, daß die Übergangsfunktionen zweier Karten in $\mathcal{A}_{\Upsilon_{gal}}$ lokale inhomogene Galileitransformationen sind. Es gilt dann nämlich $\underline{\partial}^\chi = \underline{\partial}^\varphi\gamma$ und $d\varphi = \gamma d\chi,\ \gamma \in \Gamma$ auf $U \cap V$ für $(U,\varphi),(V,\chi) \in \mathcal{A}_{\Upsilon_{gal}}$, also :

$$d\chi^0 = d\varphi^0$$

$$(\partial_1^\chi, \partial_2^\chi, \partial_3^\chi) = (\partial_1^\varphi, \partial_2^\varphi, \partial_3^\varphi)R,\ R \in O(3)$$
$$\nabla\underline{\partial}^\chi = \nabla(\underline{\partial}^\varphi\gamma) = (\nabla\underline{\partial}^\varphi)\gamma = 0$$

auf $U \cap V$, wobei in der letzten Zeile ∇ die durch (U,φ) definierte kovariante Ableitung ist. Da die inertialen Karten der so definierten Galileischen Mannigfaltigkeit (M,θ,g,∇) genau die Karten $\psi : W \to \psi(W)$ sind, für die $d\psi^0 = \theta|_W$, $(\partial_1^\psi, \partial_2^\psi, \partial_3^\psi)$ orthonormal bzgl. g und $\nabla\underline{\partial}^\psi = 0$ gilt, folgt

$$\mathcal{A}_{\Upsilon_{gal}}(M,\theta,g,\nabla) \supseteq \mathcal{A}_{\Upsilon_{gal}}.$$

Für eine vollständige Galileische Mannigfaltigkeit (M,θ,g,∇) ist

$$\mathcal{A}_{\Upsilon_{Gal}}(M,\theta,g,\nabla) := \{\varphi : \varphi \text{ ist globale inertiale Karte von} \,(M,\theta,g,\nabla)\}$$

nach Satz 1.5 eine Υ_{Gal}-Struktur auf M. Sei umgekehrt eine Υ_{Gal}-Struktur $\mathcal{A}_{\Upsilon_{Gal}}$ auf einem M, das die geforderten topologischen Eigenschaften erfüllt, gegeben. Wir definieren wie oben die Struktur (M,θ,g,∇) einer Galileischen Mannigfaltigkeit auf M. Es muß nur noch gezeigt werden, daß ∇ vollständig ist. In einer globalen inertialen Karte $\varphi \in \mathcal{A}_{\Upsilon_{Gal}}(M,\theta,g,\nabla) \supseteq \mathcal{A}_{\Upsilon_{Gal}}$ verschwinden jedoch alle Christoffelsymbole, sodaß der Kartenausdruck der Geodätengleichung, vgl. [Kob1, p.146],

$$\frac{d^2(\varphi\circ\gamma)}{dt^2} = 0$$

lautet. Der Definitionsbereich einer Geodäte $\gamma : (-\epsilon,\epsilon) \to M$, $\epsilon > 0$ läßt sich nun aber immer auf ganz $\mathbb{R}$ ausdehnen. (Den Geodäten auf M entsprechen in den globalen inertialen Karten also die Geraden bzw. in den inertialen Karten die Geradenstücke des $\mathbb{R}^4$.) □

Folgerung 1.2 (Alternativ-Definiton 2 einer Galileischen Mannigfaltigkeit) Für eine 4-dimensionale Mannigfaltigkeit M mit den topologischen Eigenschaften wegzusammenhängend, einfach zusammenhängend, parakompakt und $H^2_{dR}(M) = 0$, ist die Struktur einer (vollständigen) Galileischen Mannigfaltigkeit gleichbedeutend mit einer Υ_{gal}-Struktur (einer Υ_{Gal}-Struktur).

Kapitel 2

Die Schrödingergleichungen auf M

In diesem Kapitel wird die „übliche“ Schrödingergleichung für ein spinloses Teilchen in einem elektromagnetischen Feld, wie man sie aus den einführenden Lehrbüchern der Quantentheorie kennt, als Feldgleichung[1] auf einer Galileischen Mannigfaltigkeit formuliert.
Dabei ist es falsch von *der* Schrödingergleichung bzw. *der* Wellenfunktion des Teilchens zu sprechen. Vielmehr stellt sich heraus, daß es keine kanonische Schrödingergleichung gibt und somit auch keine eindeutige Dichteoperatorabfolge, die die Zustandsabfolge des Teichens beschreiben soll. Um eine Schrödingergleichung definieren zu können, muß insbesondere ein inertialer Beobachter gewählt werden.
Der Begriff „inertialer Beobachter“[2] aus der Galileischen Relativitätstheorie, d.h. aus der Theorie der Galileischen Raumzeit, wird in der vorliegenden Arbeit durch das mathematische Objekt eines inertialen Rahmens auf einer Galileischen Mannigfaltigkeit beschrieben. Manche Autoren verwenden statt dessen ein paralleles Geschwingigkeitsvektorfeld auf einer Galileischen Mannigfaltigkeit M, d.h. ein Vektorfeld $V \in \mathfrak{X}(M)$ mit $\theta(V) = 1$ und $\nabla V = 0$. Die angesprochene Vielfalt der Schrödingergleichungen wird durch diese Alternative jedoch nicht verändert, vgl. Seite 34.

2.1 Die Wellenfunktion eines spinlosen Teilchens

Ausgehend von einer Galileischen Mannigfaltigkeit (M, θ, g, ∇) betrachtet man im allgemeinsten Fall komplexe Vektorbündel $(\mathcal{E}, \pi_{\mathcal{E}}, M)$ über M mit komplexer Faserdimension eins. Zusätzlich soll auf $\mathcal{E}$ eine hermitesche[3], positiv definite Fasermetrik $\langle .,. \rangle$ definiert sein, die es erlaubt den Begriff eines quadratintegrablen Schnittes $\Psi : M \to \mathcal{E}$ zu erklären.

[1] i.e. partielle Differentialgleichung für komplexwertige Funktionen bzw. Differentialgleichung für Schnitte eines hermiteschen Vektorbündels

[2] oft synonym zu „inertiales Bezugssytem“ oder „Inertialsystem“

[3] antilinear im *ersten* Argument

Komplexe Vektorbündel $(\mathcal{E}, \pi_{\mathcal{E}}, M, \langle .,. \rangle)$ ausgestattet mit einer hermiteschen, positiv definiten Fasermetrik $\langle .,. \rangle$ heißen **hermitesche** Vektorbündel. Zu jedem instantanen Raum $\Sigma \subset M$ bezeichne $\Psi_\Sigma := \Psi|_\Sigma$ die Einschränkung des Schnittes Ψ auf Σ. Die reellwertige Funktion

$$\langle \Psi_\Sigma, \Psi_\Sigma \rangle : \Sigma \to \mathbb{R} : x \mapsto \langle \Psi_\Sigma(x), \Psi_\Sigma(x) \rangle$$

läßt sich nun auf Σ integrieren.
Die Fasermetrik g definiert nämlich auf jedem Σ eine kanonische Dichte $|\mu_\Sigma|$, wobei μ_Σ eine orientierte Volumsform bezüglich $g|_{T(\Sigma)}$ ist, also $\mu_\Sigma \in \Lambda^3(\Sigma)$ und $\mu_\Sigma(b_1, b_2, b_3) = 1$, die konstante 1-Funktion auf M, für einen positiv orientierten Orthonormalrahmen (b_1, b_2, b_3) von Σ. Die instantanen Räume Σ wie auch ganz M sind orientierbar , weil die entsprechenden reduzierten Rahmenbündel trivial sind, vgl. Satz 1.4. Aus dem selben Grund existiern auch positiv orientierte Orthonormalrahmen. Welche Orientierung gewählt wird, spielt keine Rolle, da bei Änderung der Orientierung μ_Σ zu $-\mu_\Sigma$ wird und die Dichte $|\mu_\Sigma| = |-\mu_\Sigma|$ invariant bleibt. Für jeden inertialen Rahmen $\underline{b} : M \to Gal(M)$ mit Dualrahmen $\underline{B} = (B^0, B^1, B^2, B^3)^t$ läßt sich zu jedem instantanen Raum $\Sigma \subset M$ eine orientierte Volumsform auf natürliche Weise konstruieren:

$$\mu_\Sigma := B^1|_\Sigma \wedge B^2|_\Sigma \wedge B^3|_\Sigma = (B^1 \wedge B^2 \wedge B^3)|_\Sigma$$

Ein Schnitt $\Psi : M \to \mathcal{E}$ heißt nun **quadratintegrabel**, wenn für alle instantanen Räume Σ von M das Integral

$$\int_\Sigma \langle \Psi_\Sigma, \Psi_\Sigma \rangle \, |\mu_\Sigma| \tag{2.1}$$

endlich ist. Für jedes Σ bildet die Menge

$$\mathcal{H}_\Sigma := \{\Psi_\Sigma : \Sigma \to \mathcal{E}|_\Sigma \;\text{ quadratintegrabler Schnitt über } \Sigma\}$$

einen Hilbertraum, wobei $\mathcal{E}|_\Sigma$ die Einschränkung von $\mathcal{E}$ auf Σ bezeichnet und quadratintegrabel in diesem Fall bedeutet, daß das Integral (2.1) für den Integrationsbereich Σ endlich ist. Das Skalarprodukt von zwei Vektoren Ψ_Σ und Φ_Σ aus $\mathcal{H}_\Sigma$ wird durch die Auswertung des Integrals

$$\int_\Sigma \langle \Psi_\Sigma, \Phi_\Sigma \rangle \, |\mu_\Sigma|$$

definiert. Mit Hilfe der hermiteschen, positiv definiten Fasermetrik $\langle .,. \rangle$ auf $\mathcal{E}$ wird das $U(1)$-Prinzipalfaserbündel $P_{\mathcal{E}}$ der Orthonormalbasen von $\mathcal{E}$ definiert:

$$P_{\mathcal{E}} := \{e \in \mathcal{E} : \; \langle e, e \rangle = 1\}.$$

Das komplexe Vektorbündel $\mathcal{E}$ läßt sich als assoziiertes Vektorbündel wiedergewinnen, vgl.[Kob1, p.54]:

$$\mathcal{E} \cong P_{\mathcal{E}} \times_{U(1)} \mathbb{C}.$$

Das $U(1)$-Prinzipalfaserbündel $P_{\mathcal{E}}$ ist im Allgemeinen jedoch nicht trivial, es gibt also i.A. keine globalen Schnitte von $P_{\mathcal{E}}$. Daher lassen sich Schnitte $\Psi : M \to \mathcal{E}$ i.A. auch nicht darstellen als $\Psi = [\sigma, \Psi_\sigma]$ mit $\sigma : M \to P_{\mathcal{E}}$ globaler Schnitt und $\Psi_\sigma : M \to \mathbb{C}$ komplexwertige Representantenfunktion von Ψ zu σ. Allerdings gibt es immer lokale Schnitte $\sigma_U : U \to P_{\mathcal{E}}|_U$, $U \subseteq M$ mit deren Hilfe sich Ψ lokal schreiben läßt als $\Psi|_U = [\sigma_U, \Psi_{\sigma_U}]$, $\Psi_{\sigma_U} : U \to \mathbb{C}$.
Geht man von einer vollständigen Galileischen Mannigfaltigkeit (M, θ, g, ∇) aus, so weiß man, daß M diffeomorph zum $\mathbb{R}^4$ und daher zusammenziehbar ist. Alle Prinzipalfaserbündel über parakompakten, zusammenziehbaren Basismannigfaltigkeiten sind jedoch trivial, vgl.[Hus, p.48,52], sodaß globale Schnitte von $P_{\mathcal{E}}$ in diesem Falle existieren und Darstellungen der Form $\Psi = [\sigma, \Psi_\sigma]$ immer möglich sind.

♣ Wir werden, falls nicht eigens gekennzeichnet, der notationellen Einfachheit halber von nun an nur noch hermitesche Vektorbündel $(\mathcal{E}, \pi_{\mathcal{E}}, M, \langle .,. \rangle)$ betrachten, deren $P_{\mathcal{E}}$ trivial ist, also

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{E}} &\cong M \times U(1) \quad \text{und daher} \\ \mathcal{E} &\cong (M \times U(1)) \times_{U(1)} \mathbb{C} \end{aligned}$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können unter dieser Voraussetzung alle Rechnungen im hermiteschen Vektorbündel $(E, \pi_E, M, \langle .,. \rangle)$ durchgeführt werden, das folgendermaßen definiert ist:

$$\begin{aligned} P &:= M \times U(1) & \pi_E([(x,u),z]) &:= x \\ E &:= (M \times U(1)) \times_{U(1)} \mathbb{C} & \pi_P(x,u) &:= x \\ &= P \times_{U(1)} \mathbb{C} \cong M \times \mathbb{C} & \langle [(x,u_1),z_1],[(x,u_2),z_2] \rangle &:= \overline{z_1 u_1} u_2 z_2 \end{aligned}$$

Wenn also im Folgenden von einer **Wellenfunktion eines spinlosen Teilchens** gesprochen wird, ist ein quadratintegrabler Schnitt $\Psi : M \to E$ gemeint, wobei M die Struktur (M, θ, g, ∇) einer Galileischen Mannigfaltigkeit trägt. ♣

2.2 Minimale Kopplung

In diesem Abschnitt wird die sogenannte „Minimale Kopplung“ eines elektromagnetischen Feldes F beziehungsweise eines seiner elektromagnetischen Potentiale A an die Geometrie des hermiteschen Vektorbündels E und damit an die Wellenfunktion eines spinlosen Teilchens behandelt. Neben den bereits zitierten Werken [Kob1] und [Ish]

wird für das Folgende auch auf [Cur], [Dan], [Egu], [Gre2], [Mar1] , [Sch], [Soc], [Tra] und [Wel] verwiesen.
Vorweg noch einige allgemeine Bemerkungen.

Verträgliche Zusammenhänge in einem hermiteschen Vektorbündel:

Wir betrachten den allgemeinen Fall eines 1-dimensionalen hermiteschen Vektorbündels $(\mathcal{E}, \pi_{\mathcal{E}}, M, \langle.,.\rangle)$ über einer Mannigfaltigkeit M, mit der vereinfachenden Annahme, daß $P_{\mathcal{E}}$ trivial ist. Eine kovariante Ableitung $\nabla^{\mathcal{E}}$ auf $\mathcal{E}$, identifiziert mit dem zugehörigen Zusammenhang auf dem Rahmenbündel $L(\mathcal{E})$ von $\mathcal{E}$, heißt **verträglich** mit der hermiteschen, positiv definiten Fasermetrik $\langle.,.\rangle$, wenn gilt, daß

$$d\langle\Psi, \Phi\rangle \;=\; \langle\nabla^{\mathcal{E}}\Psi, \Phi\rangle + \langle\Psi, \nabla^{\mathcal{E}}\Phi\rangle$$

für beliebiege Schnitte Ψ, Φ von $\mathcal{E}$, vgl. [Wel, p.76]. Dabei ist für zwei Schnitte Ψ, Φ von $\mathcal{E}$ die komplexwertige Funktion $\langle\Psi, \Phi\rangle$ auf M erklärt durch

$$\langle\Psi, \Phi\rangle(x) := \langle\Psi(x), \Phi(x)\rangle,\ \forall x \in M.$$

Sei $\omega^{\mathcal{E}}$ die $\mathbb{C}$-wertige ($Lie(Gl_1(\mathbb{C})) = \mathbb{C}$) Zusammenhangs-1-Form auf $L(\mathcal{E})$ des Zusammenhangs $\nabla^{\mathcal{E}}$. Sei weiters $\sigma : M \to P_{\mathcal{E}}$ ein globaler Schnitt, also $\sigma(x)$ ein Vektor der Länge eins aus der Faser $\mathcal{E}_x = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(x)$. Es gilt $\langle\sigma, \sigma\rangle = 1$, die konstante 1-Funktion auf M. Da der Zusammenhang $\nabla^{\mathcal{E}}$ eindeutig durch die Rückholung $\sigma^*(\omega^{\mathcal{E}})$ charakterisiert ist, denn man hat

$$\nabla^{\mathcal{E}}[\sigma, \Psi_\sigma] = [\sigma, d\Psi_\sigma + \sigma^*(\omega^{\mathcal{E}})\Psi_\sigma]\ ,$$

erhalten wir aus

$$\begin{aligned} 0 &= d\langle\sigma, \sigma\rangle \\ &= \langle\nabla^{\mathcal{E}}\sigma, \sigma\rangle + \langle\sigma, \nabla^{\mathcal{E}}\sigma\rangle \\ &= \overline{\sigma^*(\omega^{\mathcal{E}})} + \sigma^*(\omega^{\mathcal{E}}) \end{aligned}$$

die Gleichung

$$0 \;=\; \overline{\sigma^*(\omega^{\mathcal{E}})} + \sigma^*(\omega^{\mathcal{E}})$$

als äquivalente Bedingung zur Verträglichkeit von $\nabla^{\mathcal{E}}$ mit $\langle.,.\rangle$, wobei $\mathcal{E}$ mit $P_{\mathcal{E}} \times_{U(1)} \mathbb{C}$ identifiziert wurde und $\bar{\ }$ die komplexe Konjugation ist.
$\nabla^{\mathcal{E}}$ ist also genau dann verträglich mit $\langle.,.\rangle$, wenn die Einschränkung der Zusammenhangs-1-Form auf das $U(1)$-Prinzipalfaserbündel $P_{\mathcal{E}}$ der Orthonormalbasen von $\mathcal{E}$ imaginärwertig also $Lie(U(1))$-wertig ist ($Lie(U(1)) = i\,\mathbb{R}$, i imaginäre Einheit). Das ist aber genau dann der Fall, wenn $\nabla^{\mathcal{E}}$ reduzibel auf einen Zusammenhang

in $P_{\mathcal{E}} \cong M \times U(1)$ ist, vgl.[Kob1, p.83 *Remark* und p.117 Proposition 1.5]. Wir erhalten zusammenfassend folgende Äquivalenzen:

$$\nabla^{\mathcal{E}} \text{ ist verträglich mit } \langle .,. \rangle$$
$$\Updownarrow$$
$$\overline{\sigma^*(\omega^{\mathcal{E}})} = -\sigma^*(\omega^{\mathcal{E}}) \text{ für ein } \sigma : M \to P_{\mathcal{E}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\nabla^{\mathcal{E}} \text{ ist reduzibel auf } P_{\mathcal{E}}$$

Nun zurück zur minimalen Kopplung:
Wir betrachten eine Galileische Mannigfaltigkeit (M, θ, g, ∇) und das zugehörige hermitesche Vektorbündel $(E, \pi, M, \langle .,. \rangle)$, vgl. Seite 21. Ähnlich zur Geometrie der Galileischen Mannigfaltigkeit M, wo die Verträglichkeit des linearen Zusammenhanges ∇ mit den anderen Srukturen θ und g gefordert wird, **verlangen wir in der Quantenmechanik von einem Zusammenhang ∇^E auf E, verträglich mit der hermiteschen, positiv definiten Fasermetrik $\langle .,. \rangle$ zu sein.** Nach den vorangehenden Überlegungen wissen wir, daß es ausreicht, die Zusammenhänge im Prinzipalfaserbündel $P \cong P_E$ zu studieren.

♣ Im weiteren Verlauf bezeichnen wir ∇^E wieder mit ∇, da aus dem Zusammenhang heraus keine Verwechslungsgefahr mit dem linearen Zusammenhang ∇ auf M besteht. Aus dem selben Grund werden wir ab jetzt auch ω statt ω^P für die imagimärwertige Zusammenhangs-1-Form auf P des Zusammenhangs ∇ schreiben. ♣

Zusammenhänge auf dem $U(1)$-Prinzipalfaserbündel P:

Ein Zusammenhang in einem Prinzipalfaserbündel besteht in der Angabe von äquivariant angeordneten horizontalen Unterräumen des Tangentialbündels des Prinzipalfaserbündels und kann gleichwertig durch eine 1-Form auf dem Prinzipalfaserbündel mit Werten in der Liealgebra der Strukturgruppe charakterisiert werden, die sogenannte Zusammenhangs-1-Form [Kob1, p.63f.], wobei das Unterbündel der horizontalen Unterräume der Kern der Zusammenhangs-1-Form ist, vgl. Abbildung 2.1.

Sei also ω die Zusammenhangs-1-Form eines Zusammenhangs ∇ auf einem P wie oben. Jeder Schnitt $\sigma : M \to P$ erklärt durch Rückholung einen Repräsentanten $\sigma^*\omega$ von ω auf M. Aus der $i\mathbb{R}$-wertigen 1-Form $\sigma^*\omega$ auf M läßt sich nach Wahl einer Kopplungskonstanten $q \in \mathbb{R}$ (elektrische Ladung des spinlosen Teilchens) eine reellwertige 1-Form A auf M definieren:

$$\sigma^*\omega =: i\frac{q}{\hbar}A$$

Passive Umeichung:
Die 1-Form A hängt von der Wahl des Schnittes σ ab. Verwendet man einen anderen

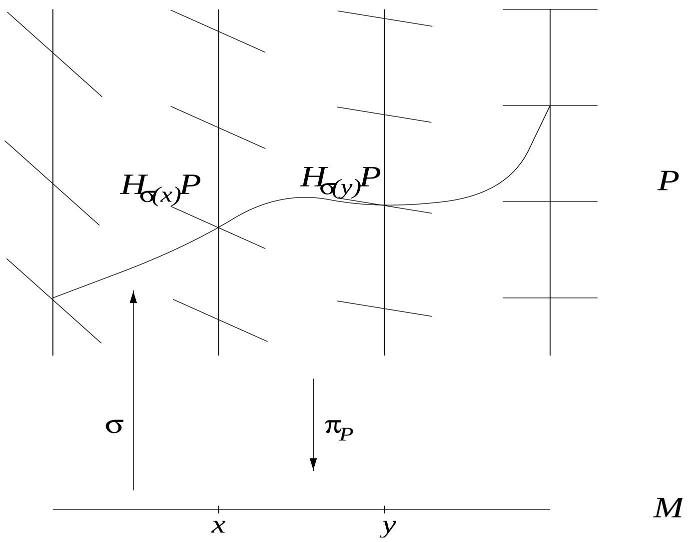

Abbildung 2.1: Schnitt und horizontale Unterräume in P

Schnitt $\tau : M \to P$, dann gibt es genau eine Funktion $g : M \to U(1)$, die die beiden Schnitte „verbindet“:

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \sigma(x)g(x), \quad \forall x \in M \text{ oder kurz} \\ \tau &= \sigma g. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Die Rückholung $\tau^*\omega$ ändert sich im Vergleich zu $\sigma^*\omega$ durch

$$\begin{aligned} (\tau^*\omega)_x &= (Ad_{g^{-1}(x)})_* \circ (\sigma^*\omega)_x + g^{-1}(x)d_x g \\ &= (\sigma^*\omega)_x + g^{-1}(x)d_x g, \ \forall x \in M, \end{aligned}$$

vgl. [Ish, p.160f.], [Kob1, p.65f.], wobei verwendet wurde, daß die Gruppe $U(1)$ abelsch ist und daher die Adjunktion $Ad_u : U(1) \to U(1)$, $Ad_u(v) := uvu^{-1}$ mit einem Element $u \in U(1)$ die identische Abbildung ist. Schreibt man die Eichfunktion g mit Hilfe einer reellwertigen Funktion φ als

$$g = e^{i\varphi}, \quad \varphi : M \to \mathbb{R},$$

das ist möglich, weil M und $\mathbb{R}$ (die universelle Überlagerung der $U(1)$) einfach zusammenhängend sind, vgl. [Stö, p.154 Liftungstheorem], so erhält man

$$\begin{aligned} \tau^*\omega &= \sigma^*\omega + id\varphi \quad \text{bzw. mit} \qquad (2.3) \\ \tau^*\omega &=: i\frac{q}{\hbar}A' \\ A' &= A + \frac{\hbar}{q}d\varphi. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen den Übergang von A zu A', der durch Änderung des Schnittes in P bei gleicher Zusammenhangs-1-Form ω zu Stande kommt, als **passive Umeichung**.

Krümmung:
Die Krümmung $\Omega := D\omega$ des Zusammenhanges ∇ läßt sich mit der Strukturgleichung (vgl.[Ish, p.175],[Kob1, p.77])

$$\Omega(X,Y) = d\omega(X,Y) + [\omega(X), \omega(Y)], \ \forall \text{ Vektorfelder } X, Y \text{ auf } P$$

berechnen. Da die Gruppe $U(1)$ abelsch ist, ist die Lieklammer $[.,.]$ null, vgl. [Gre2, p.44], und wir erhalten

$$\Omega = d\omega.$$

Für ein $u \in U(1)$ bezeichne

$$\begin{array}{rcl} \delta_u : P & \rightarrow & P \\ (x,v) & \mapsto & \delta_u(x,v) := (x, vu) \end{array}$$

die Rechtsoperation von u auf P. Es gilt, vgl.[Ish, p.156], [Kob1, p.64]

$$(\delta_u)^*\omega = (Ad_{u^{-1}})_*\omega = \omega. \tag{2.4}$$

Weil die Rückholung mit der äußeren Ableitung vertauscht, gilt daher auch

$$(\delta_u)^*\Omega = \Omega. \tag{2.5}$$

Sowohl die Zusammenhangs-1-Form ω als auch die Krümmungs-2-Form Ω sind also rechtsinvariant.
Sei $\sigma : M \rightarrow P$ wieder ein Schnitt, dann läßt sich die Krümmung Ω zu einer $i\mathbb{R}$-wertigen 2-Form $\sigma^*\Omega$ auf M zurückholen, woraus sich durch

$$\sigma^*\Omega =: i\frac{q}{\hbar}F$$

eine reellwertige 2-Form F auf M definieren läßt. Das so definierte F ist jedoch *unabhängig* vom gewählten Schnitt. Sei nämlich $\tau : M \rightarrow P$ ein weiterer Schnitt und durch $\tau = \sigma g = \sigma e^{i\varphi}$ wie oben mit σ verknüpft, dann gilt

$$\begin{array}{rcl} i\frac{q}{\hbar}F' & := & \tau^*\Omega = \tau^*(d\omega) \\ & = & d(\tau^*\omega) = d(\sigma^*\omega + id\varphi) \\ & = & d(\sigma^*\omega) = \sigma^* d\Omega \\ & = & i\frac{q}{\hbar}F. \end{array}$$

Als weiteres Resultat erhalten wir aus diesen Berechnungen

$$F = dA = dA'. \tag{2.6}$$

Neben der Rechtsinvarianz hat die Krümmungs-2-Form auch die Eigenschaft, horizontal zu sein, d.h. vertikale Vektoren V, i.e. an die Fasern des Bündels P tangentiale Vektoren, auf null abzubilden:

$$i_V(\Omega) = \Omega(V, .) = 0 \ \in \Lambda^1(P), \tag{2.7}$$

vgl. Definition der äußeren kovarianten Ableitung D in [Kob1, p.77]. Differentialformen auf einem Prinzipalfaserbündel mit diesen beiden Eigenschaften (2.5) und (2.7) stehen nun aber in linearer Bijektion mit den Differentialformen auf der Basismannigfaltigkeit und werden **basisch** genannt, vgl. [Gre2, 240f., p.272] und [Cur, p.351]. Die Rückholung mit der Projektion π_P liefert den angesprochenen Isomorphismus

$$\pi_P^* : \Lambda(M) \xrightarrow{\cong} \Lambda_{basisch}(P).$$

Es gibt also genau eine imaginärwertige 2-Form G auf M, sodaß $\Omega = \pi_P^* G$ gilt. Andererseits wissen wir jedoch, daß sich für einen beliebigen Schnitt $\sigma : M \to P$ die 2-Form F auf M berechnen läßt als

$$\begin{aligned} i\frac{q}{\hbar}F &= \sigma^*\Omega = \sigma^*\pi_P^* G \\ &= (\pi \circ \sigma)^* G = id_M^* G \\ &= G. \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$\boxed{\Omega = i\tfrac{q}{\hbar}\pi_P^* F.} \tag{2.8}$$

Die **minimale Kopplung** besteht nun darin, den umgekehrten Weg zu gehen. Die elektromagnetische Einwirkung auf ein spinloses Teilchen der elektrischen Ladung $q \in \mathbb{R}$ wird von einem elektromagnetischem Feldstärketensor F (i.e. einer geschlossenen 2-Form) auf M bestimmt. Dieses F enthält die Komponenten des elektrischen und des magnetischen Feldes relativ zu einem gewählten Inertialrahmen $\underline{i} = (i_0, i)$, bzw. dessen inertialem Dualrahmen $\underline{I} = (I^0, I)^t$.

$$F = \sum_{k=1}^{3} E_{\underline{i}}^k I^0 \wedge I^k - B_{\underline{i}}^1 I^2 \wedge I^3 - B_{\underline{i}}^2 I^3 \wedge I^1 - B_{\underline{i}}^3 I^1 \wedge I^2$$

Ausgehend von einem Feldstärketensor F auf M wird nun eine geschlossene, imaginärwertige 2-Form Ω durch Gleichung (2.8) definiert.

Das so definierte Ω hat die Eigenschaften einer Krümmungs-2-Form auf P, sodaß die Menge der Zusammenhangs-1-Formen ω studiert werden kann, deren Krümmung Ω ist. Diese Zusammenhangs-1-Formen ω sind wiederum gleichwertig mit verträglichen kovarianten Ableitungen ∇ im hermiteschen Vektorbündel E. Zuerst aber noch einige

Erläuterungen:
Das elektrische Feld $E_{\underline{i}}$ und das magnetische Feld $B_{\underline{i}}$ eines Feldstärketensors F zu einem gewählten Inertialrahmen $\underline{i} = (i_0, i)$ sind durch

$$\begin{aligned} E_{\underline{i}} &:= \underline{\sharp}(i_{i_0}(F)) && (2.9) \\ B_{\underline{i}} &:= -\underline{\sharp}(i_{i_0}(\star_{\underline{i}} F)) && (2.10) \end{aligned}$$

definiert. Die Komponentenfunktionen der raumartigen Vektorfelder $E_{\underline{i}}$ und $B_{\underline{i}}$ auf M bezüglich $\underline{i}$ sind definiert durch

$$\begin{aligned} E_{\underline{i}} &=: \sum_{k=1}^{3} E_{\underline{i}}^k \, i_k \\ B_{\underline{i}} &=: \sum_{k=1}^{3} B_{\underline{i}}^k \, i_k \end{aligned}$$

Entsprechende Definitionen und Relationen gibt es bei Verwendung von inertialen Karten (φ, U) statt eines inertialen Rahmens $\underline{i}$.
Die in den Gleichungen (2.9) und (2.10) auftretende Abbildung $\underline{\sharp}$ ist mit Hilfe der zur Fasermetrik g der Galileischen Mannigfaltigkeit gehörenden Bilinearform h (vgl. Satz 1.1) folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} \underline{\sharp} : \Lambda^1(M) &\to \mathfrak{X}(M) \\ \alpha &\mapsto \underline{\sharp}(\alpha), \text{ sodaß} \\ h(\alpha, \beta) &= \beta(\underline{\sharp}(\alpha)), \ \forall \beta \in \Lambda^1(M). \end{aligned}$$

Für einen inertialen Rahmen $\underline{i} = (i_0, i_1, i_2, i_3)$ mit Dualrahmen $\underline{I} = (I^0, I^1, I^2, I^3)^t$ gilt:

$$\underline{\sharp}(I^0) = 0, \quad \underline{\sharp}(I^1) = i_1, \quad \underline{\sharp}(I^2) = i_2, \quad \underline{\sharp}(I^3) = i_3.$$

Wie man an diesem Beispiel sieht, ist $\underline{\sharp}$ nicht umkehrbar. Anders ausgedrückt, man kann mit h „Indizes heben, aber keine senken“.
In Gleichung (2.10) kommt eine Verallgemeinerung des Hodge-Operators nämlich die lineare Abbildung $\star_{\underline{i}} : \Lambda^k(M) \to \Lambda^{4-k}(M)$ vor (k kann die Werte 0 bis 4 annehmen). Da auf der gewählten Galileischen Mannigfaltigkeit keine Orientierung festgelegt wurde (vgl. Seite 20), gibt es auch keinen dazugehörigen Hodge-Operator. Jeder Inertialrahmen $\underline{i} = (i_0, i_1, i_2, i_3)$ mit Dualrahmen $\underline{I} = (I^0, I^1, I^2, I^3)^t$ definiert jedoch eine

Orientierung und durch

$$\mu_{\underline{i}} := I^0 \wedge I^1 \wedge I^2 \wedge I^3 \ \in \Lambda^4(M)$$

ein positiv orientiertes Volumselement auf M. Verwendet man einen anderen inertialen Rahmen $\underline{j}$, so wissen wir aus Satz 1.5, daß es genau eine Galileimatrix $\gamma \in \Gamma$ gibt, sodaß $\underline{j} = \underline{i}\gamma$ gilt. Das zugehörige Volumselement ändert sich gemäß

$$\mu_{\underline{j}} = det(\gamma)\mu_{\underline{i}} = \pm\mu_{\underline{i}}. \tag{2.11}$$

Es gibt auf einer Galileischen Mannigfaltigkeit also bis auf ein Vorzeichen ein kanonisches Volumselement. Zu einem gewählten Inertialrahmen $\underline{i}$ können wir nun den linearen Operator $\star_{\underline{i}}$ definieren, vgl. [Gre2, p.487]:

$$\begin{aligned} \star_{\underline{i}}(\alpha^1 \wedge ... \wedge \alpha^k) &:= i_{\underline{\sharp}(\alpha^k)} ... i_{\underline{\sharp}(\alpha^1)}\mu_{\underline{i}} \quad \text{und} \\ \star_{\underline{i}}(1) &:= \mu_{\underline{i}} \end{aligned}$$

für $k \in \{1, ..., 4\}$ und $\alpha^l \in \Lambda^1(M),\ \forall l = 1, ..., k$, oder äquivalent durch die Forderung, vgl. [Mar1, p.20]:

$$\sigma \wedge \star_{\underline{i}}(\lambda) := h(\sigma, \lambda)\mu_{\underline{i}},\ \forall \sigma \in \Lambda^k(M),$$

wobei $\lambda \in \Lambda^k(M)$ und die symmetrische Bilinearform h auf $T^*(M)$ bzw. $\Lambda^1(M)$ auf alle $\Lambda^k(M),\ k = 0, ..., 4$ erweitert wurde durch:

$$h(\alpha^1 \wedge ... \wedge \alpha^k, \beta^1 \wedge ... \wedge \beta^k) := \det((h(\alpha^i, \beta^j))_{i,j=1,...,k}).$$

Man sieht aus Gleichung (2.11), daß sich die Operatoren $\star_{\underline{i}}$ und $\star_{\underline{j}}$ zu zwei Inertialrahmen $\underline{i}$ und $\underline{j} = \underline{i}\gamma$ nur durch ein Vorzeichen unterscheiden können:

$$\star_{\underline{j}} = det(\gamma)\star_{\underline{i}} = \pm \star_{\underline{i}}\ .$$

Schließlich erhalten wir für einen inertialen Rahmen $\underline{i} = (i_0, i_1, i_2, i_3)$ mit Dualrahmen $\underline{I} = (I^0, I^1, I^2, I^3)^t$ folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} \star_{\underline{i}}(I^0 \wedge I^k) &= 0,\ \forall k = 1, 2, 3 \\ \star_{\underline{i}}(I^2 \wedge I^3) &= I^0 \wedge I^1 \\ \star_{\underline{i}}(I^3 \wedge I^1) &= I^0 \wedge I^2 \\ \star_{\underline{i}}(I^1 \wedge I^2) &= I^0 \wedge I^3 \end{aligned}$$

Wieder zurück zur minimalen Kopplung:
Gibt man sich auf M ein elektromagnetisches Feld F vor, so ist das gleichwertig mit der Vorgabe einer Krümmungs-2-Form Ω auf $P = M \times U(1)$. Denn sowohl F als auch Ω

sind geschlossen, $dF = 0$ (1. Maxwellgleichung), $d\Omega = dd\omega = 0$, und diese Eigenschaft wird durch die zueinander inversen Zuordnungen

$$\begin{aligned}\Omega_F &:= i\frac{q}{\hbar}\pi_P^* F,\\ F_\Omega &:= -i\frac{\hbar}{q}\sigma^*\Omega,\end{aligned}$$

mit $\sigma : M \to P$ ein Schnitt, nicht verändert. Weiters ist garantiert, daß Ω_F horizontal und rechtsinvariant ist:

$$\begin{aligned}\Omega_F(V,.) &= i\frac{q}{\hbar}F(T\pi_P(V),.) = 0, \text{ weil } T\pi_P(V) = 0 \text{ für jeden vertikalen Vektor } V,\\ (\delta_u)^*\Omega_F &= i\frac{q}{\hbar}(\pi_P \circ \delta_u)^* F = \Omega_F, \text{ weil } \pi_P \circ \delta_u = \pi_P,\ \forall u \in U(1).\end{aligned}$$

Da $H^2_{dR}(M) = 0$ auf der Galileischen Mannigfaltigkeit, sind die geschlossenen 2-Formen die exakten 2-Formen. Es gibt also immer 1-Formen A auf M, sodaß $F = dA$ gilt, und diese A unterscheiden sich wegen $H^1_{dR}(M) = 0$ immer durch das Differential einer Funktion

$$\Lambda : M \to \mathbb{R}, \quad F = dA = dA', \quad A' = A + d\Lambda.$$

Zu jedem A mit $F = dA$ läßt sich mit Hilfe eines Schnitts $\sigma : M \to P$ eine Zusammenhangs-1-Form ω auf P durch

$$\sigma^*\omega := i\frac{q}{\hbar}A$$

definieren, sodaß die Krümmungs-2-Form Ω dieses Zusammenhanges gleich der von F induzierten ist

$$\sigma^*\Omega = \sigma^* d\omega = i\frac{q}{\hbar}dA = i\frac{q}{\hbar}F.$$

Zu jedem elektromagnetisches Feld F auf M erhält man also genau eine Krümmungs-2-Form Ω auf P (und umgekehrt, sodaß die Zuordnungen invers sind). Zusammenhangs-1-Formen ω mit $d\omega = \Omega$ sind aber nicht eindeutig durch F bestimmt. Sie können jedoch nach Wahl eines elektromagnetischen Potentials A zu F und eines Schnittes $\sigma : M \to P$ immer durch $\sigma^*\omega := i\frac{q}{\hbar}A$ konstruiert werden. Ferner gibt es keine Zusammenhangs-1-Formen ω mit $d\omega = \Omega$, die nicht auf diese Weise konstruierbar sind, denn aus $\Omega = d\omega = d\omega'$ folgt $d\sigma^*(\omega - \omega') = 0$ und somit $\sigma^*\omega = \sigma^*\omega' + id\varphi$ für einen Schnitt $\sigma : M \to P$ und eine reellwertige Funktion φ auf M. Mit $\sigma^*\omega =: i\frac{q}{\hbar}A$ und $\sigma^*\omega' =: i\frac{q}{\hbar}A'$ ergibt sich $A = A' + \frac{\hbar}{q}d\varphi$.

Die Zusammenhangs-1-Formen ω mit $d\omega = \Omega$ können auch durch sogenannte Eichtransformationen eines ω_0 mit $d\omega_0 = \Omega$ gewonnen werden.

Aktive Umeichung:

Definition 2.1 (Eichtransformation) Sei (M, θ, g, ∇) eine Galileische Mannigfaltigkeit und $P := M \times U(1)$. Eine Abbildung $\Phi : P \to P$ heißt **Eichtransformation** des $U(1)$-Prinzipalfaserbündels P, falls gilt:

(1) Φ ist fasertreu, d.h. $\pi_P \circ \Phi = \pi_P$ und

(2) Φ ist $U(1)$-äquivariant, d.h. $\delta_u \circ \Phi = \Phi \circ \delta_u, \ \forall u \in U(1)$.

Folgerung 2.1 Die Menge der Eichtransformationen von P steht in bijektiver Beziehung zur Menge der $U(1)$-wertigen Funtionen $g : M \to U(1)$ auf M, vgl. [Ish, p.129f.]. Denn eine Eichtransformation Φ definiert durch

$$\Phi(x, u) = (x, ug(x)), \qquad \forall x \in M, u \in U(1) \tag{2.12}$$

eine $U(1)$-wertige Funktion g auf M, und, umgekehrt, jede $U(1)$-wertige Funktion g auf M definiert durch Gleichung (2.12) eine Eichtransformation Φ von P. Mit Hilfe einer reellwertigen Funktion φ auf M schreiben wir $g = e^{i\varphi}$.

Ausgehend von einer Zusammenhangs-1-Form ω_0 auf P läßt sich mit einer Eichtransformation Φ durch

$$\omega := \Phi^* \omega_0$$

eine neue, eichtransformierte Zusammenhangs-1-Form ω auf P definieren, vgl. [Kob1, p.79ff.]. Die horizontalen Unterräume des zu ω gehörigen Zusammenhangs ∇ werden durch die Tangentialabbildung $T\Phi$ in die horizontalen Unterräume des zu ω_0 gehörigen Zusammenhangs ∇_0 abgebildet.
Sei $\sigma : M \to P$ ein Schnitt von P und A_0 die zu ω_0 und σ gehörige 1-Form auf M, d.h.

$$\sigma^* \omega_0 =: i\frac{q}{\hbar} A_0.$$

Wir berechnen nun die zum *selben* Schnitt σ gehörige 1-Form A der Zusammenhangs-1-Form ω und verwenden dabei, daß $\tau : M \to P, \ \tau := \Phi \circ \sigma$ wieder ein Schnitt von P ist, und sich mittels der zu Φ gehörenden $U(1)$-wertigen Funktion g als $\tau = \sigma g = \sigma e^{i\varphi}$ schreiben läßt, vgl. Seite 24:

$$\begin{aligned} i\frac{q}{\hbar} A &:= \sigma^* \Phi^* \omega_0 \\ &= (\Phi \circ \sigma)^* \omega_0 \\ &= \tau^* \omega_0 \\ &= \sigma^* \omega_0 + i d\varphi \quad \text{(vgl. Gleichung (2.3))} \\ &= i\frac{q}{\hbar} A_0 + i d\varphi, \quad \text{also} \\ A &= A_0 + \frac{\hbar}{q} d\varphi. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Der Übergang von A_0 zu A, der durch Änderung der Zusammenhangs-1-Form mittels einer Eichtransformation bei festgehaltenem Schnitt zu Stande kommt, wird als **aktive Umeichung** bezeichnet.

Aus Gleichung (2.6) erhalten wir unmittelbar die

Folgerung 2.2 Die Krümmungs-2-Form bleibt unter Eichtransformation invariant, d.h. hat ω_0 Krümmung $\Omega_0 = d\omega_0$, so gilt für eine Eichtransformation Φ mit $\omega := \Phi^*\omega_0$, daß die Krümmung $\Omega = d\omega$ von ω gleich der von ω_0 ist: $\Omega = \Omega_0$.
Weiters folgt, mit ähnlichen Argumenten wie auf Seite 29, daß sich alle Zusammenhangs-1-Formen ω mit $d\omega = \Omega$, für ein vorgegebenes Ω, durch Eichtransformationen aus einem ω_0 mit $d\omega_0 = \Omega$ gewinnen lassen.

ERGEBNIS:
Die **minimale Kopplung** eines elektromagnetischen Feldes F an die Geometrie des Prinzipalfaserbündels P ist also **nicht eindeutig**! Zu einem F auf M gibt es unendlich viele Zusammenhänge ∇ auf P mit zugehöriger Zusammenhangs-1-Form ω, sodaß

$$d\omega = i\frac{q}{\hbar}\pi_P^* F$$

gilt. Um konkrete Rechnungen durchführen zu können, muß also zuerst ein solches ω **gewählt** werden. Die Rechenergebnisse, die *physikalische* Relevanz besitzen, sollen jedoch *unabhängig* von der Wahl eins ω aus der zu F gehörenden Klasse von Zusammenhangs-1-Formen sein. In der Definition der Erwartungswerte von Observablen muß diese Unabhängigkeit garantiert werden.

2.3 Ortsoperatoren und Impulsoperatoren

Transformationsverhalten der kovarianten Ableitung von Wellenfunktionen:
Sei (M, θ, g, ∇) eine Galileische Mannigfaltigkeit und $\Psi : M \to E$ ein Schnitt im zugehörigen hermiteschen Vektorbündel $(E, \pi_E, M, \langle .,. \rangle)$, vgl. Seite 21. Sei weiters ω eine Zusammenhangs-1-Form im Prinzipalfaserbündel $P = M \times U(1)$ und ∇ die zugehörige kovariante Ableitung. Mittels eines Schnittes $\sigma : M \to P$ läßt sich Ψ als $\Psi = [\sigma, \Psi_\sigma]$ schreiben. Die *kovariante Ableitung* $\nabla_X \Psi$ von Ψ nach einem Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ läßt sich folgendermaßen berechnen, vgl. [Ish, p.172]:

$$\nabla_X \Psi = [\sigma, X(\Psi_\sigma) + \sigma^*\omega(X)\Psi_\sigma] \tag{2.14}$$

Oder kurz:

$$\boxed{\nabla \Psi = [\sigma, d\Psi_\sigma + \sigma^*\omega\Psi_\sigma]}$$

Sei nun $\Phi : P \to P$ eine Eichtransformation mit zugehöriger $U(1)$-wertiger Funktion $e^{i\varphi} : M \to U(1)$, $\tilde{\omega} := \Phi^*\omega$ die eichtransformierte Zusammenhangs-1-Form und $\tilde{\nabla}$ die entsprechende, eichtransformierte kovariante Ableitung. Die Eichtransformation Φ induziert auf der Menge $Sec(E)$ der Schnitte von E eine Transformation, die wir wieder mit einer Tilde bezeichnen: $\forall \Psi \in Sec(E)$ sei

$$\tilde{\Psi} := e^{-i\varphi}\Psi.$$

Eine direkte Rechnung bzw. [Gre2, p.259] ergibt folgendes wichtiges Transformationsverhalten:

$$\boxed{\tilde{\nabla}\tilde{\Psi} = \widetilde{\nabla\Psi}} \tag{2.15}$$

Definition der Orts- und Impulsoperatoren zu einem inertialen Beobachter: Sei $\underline{b}$ ein inertialer Rahmen der Galileischen Mannigfaltigkeit (M, θ, g, ∇) und $\underline{B}$ der dazu duale Rahmen. Seien weiters für $\mu = 0, 1, 2, 3$ $x^\mu : M \to \mathbb{R}$ die bis auf eine additive Konstante bestimmten Funktionen auf M, die $dx^\mu = B^\mu$, $\forall \mu = 0, 1, 2, 3$ erfüllen.

Achtung: Auf Grund der angesprochenen Unbestimmtheit der Funktionen x^μ wäre es im Folgenden korrekter von Ortsoperatoren zu einem inertialen Beobachter bei Wahl eines „Ursprungs" zu sprechen.

Definition 2.2 (Orts- und Impulsoperatoren) Unter den obigen Voraussetzungen sind die drei *Ortsoperatoren* X^a, $a = 1, 2, 3$ definiert als

$$\begin{aligned} X^a : Sec(E) &\to Sec(E) \\ \Psi &\mapsto X^a(\Psi) := x^a\Psi \end{aligned}$$

und die drei *Impulsoperatoren* P^a, $a = 1, 2, 3$ als

$$\begin{aligned} P^a : Sec(E) &\to Sec(E) \\ \Psi &\mapsto P^a(\Psi) := -i\hbar\nabla_{b_a}\Psi. \end{aligned}$$

Die Definition der Impulsoperatoren hängt nicht nur von den drei raumartigen Vektorfeldern b_a, $a = 1, 2, 3$ ab, sondern auch von der Wahl des Zusammenhangs ∇, vgl. minimale Kopplung! Die Ortsoperatoren sind hingegen unabhängig vom gewählten Zusammenhang in P definiert.

Bemerkungen:
Alternativ zur angegebenen Definition könnte man die Einschränkung auf instantane Räume $\Sigma \subset M$ betrachten:

$$\begin{aligned} X^a_\Sigma(\Psi|_\Sigma) &:= x^a|_\Sigma \, \Psi|_\Sigma \quad \text{bzw.} \\ P^a_\Sigma(\Psi|_\Sigma) &:= -i\hbar\nabla_{b_{a,\Sigma}}\Psi|_\Sigma \,. \end{aligned}$$

Dies ist wohldefiniert, da die Vektorfelder $b_{a,\Sigma} := b_a|_\Sigma$ tangential an die instantane Räume Σ sind.

Definition 2.3 (Erwartungswerte) Sei $\Psi : M \to E$ eine auf 1 normierte[4] Wellenfunktion[5] eines spinlosen Teilchens und $\Sigma \subset M$ ein instantaner Raum. Der *Erwartungswert* $\mathbb{E}(O, \Sigma, \Psi)$ eines Operators O (z.B. Orts- oder Impulsoperator bzw. Linearkombinationen von Produkten von diesen) zum Zeitpunkt Σ und zur Wellenfunktion Ψ ist definiert als, vgl. Seite 20:

$$\mathbb{E}(O, \Sigma, \Psi) := \int_\Sigma \langle \Psi_\Sigma, (O\Psi)_\Sigma \rangle \, |\mu_\Sigma| \, .$$

Die Erwartungswerte der Orts- und Impulsoperatoren zu einem inertialen Beobachter sind invariant unter *gleichzeitiger* Eichtransformation der Wellenfunktion und des Zusammenhangs in P, denn:

$$\int_\Sigma \langle \tilde{\Psi}_\Sigma, x^a \tilde{\Psi}_\Sigma \rangle \, |\mu_\Sigma| = \int_\Sigma e^{i\varphi} e^{-i\varphi} \langle \Psi_\Sigma, x^a \Psi_\Sigma \rangle \, |\mu_\Sigma| = \int_\Sigma \langle \Psi_\Sigma, x^a \Psi_\Sigma \rangle \, |\mu_\Sigma|$$

auf Grund der Sesquilinearität des Skalarprodukts $\langle ., . \rangle$ in E, und

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \langle \tilde{\Psi}_\Sigma, -i\hbar \tilde{\nabla}_{b_a} \tilde{\Psi}_\Sigma \rangle \, |\mu_\Sigma| &= \int_\Sigma e^{i\varphi} \langle \Psi_\Sigma, -i\hbar e^{-i\varphi} \nabla_{b_a} \Psi_\Sigma \rangle \, |\mu_\Sigma| \\ &= \int_\Sigma \langle \Psi_\Sigma, -i\hbar \nabla_{b_a} \Psi_\Sigma \rangle \, |\mu_\Sigma| \, , \end{aligned}$$

vergleiche Gleichung (2.15).

2.4 Die Schrödingergleichungen auf M

Sei (M, θ, g, ∇) eine Galileische Mannigfaltigkeit und F ein elektromagnetischer Feldstärketensor.
Um nun eine Schrödingergleichung für ein spinloses Teilchen der elektrischen Ladung $q \in \mathbb{R}$ und Masse $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$, das unter der Einwirkung von F steht, definieren zu können, müssen zuerst zwei zusätzlich mathematische Objekte **gewählt** werden:

(1) eine Zusammenhangs-1-Form ω auf P mit der Eigenschaft $d\omega = i\frac{q}{\hbar}\pi_P^* F$ (minimale Kopplung) und

(2) ein inertialer Rahmen $\underline{b} = (b_0, b) = (b_0, b_1, b_2, b_3)$.

[4] d.h.: $\int_\Sigma \langle \Psi_\Sigma, \Psi_\Sigma \rangle \, |\mu_\Sigma| = 1$, für alle instantanen Räume Σ.

[5] Ψ muß natürlich im Definitionsbereich von O liegen, worauf im Folgenden jedoch nicht mehr hingewiesen werden wird.

Nach deren Wahl läßt sich der **Schrödinger-Differentialoperator** $D^{\omega}_{\underline{b}}$ definieren:

$$\boxed{D^{\omega}_{\underline{b}} := i\hbar\nabla_{b_0} + \tfrac{\hbar^2}{2m}\textstyle\sum_{k=1}^{3}\nabla_{b_k}\nabla_{b_k}} \tag{2.16}$$

wobei ∇ die zu ω gehörende kovariante Ableitung von Schnitten in E bezeichnet. Daß eine Wellenfunktion Ψ die **Schrödingergleichung zu** ω **und** $\underline{b}$ erfüllt, bedeutet dann, daß Ψ im Kern des Schrödinger-Differentialoperators $D^{\omega}_{\underline{b}}$ liegt, d.h.:

$$\boxed{D^{\omega}_{\underline{b}}\Psi = 0}$$

Verwendet man einen Schnitt $\sigma : M \to P$ und Gleichung (2.14), so schreibt sich die Schrödingergleichung für eine Wellenfunktion $\Psi = [\sigma, \Psi_\sigma]$ zum Schrödinger-Differentialoperator $D^{\omega}_{\underline{b}}$ als:

$$\begin{aligned} i\hbar\nabla_{b_0}\Psi &= -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{k=1}^{3}\nabla_{b_k}\nabla_{b_k}\Psi \quad \text{bzw.} \\ i\hbar(b_0 + i\frac{q}{\hbar}A_0)\Psi_\sigma &= -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{k=1}^{3}(b_k + i\frac{q}{\hbar}A_k)(b_k + i\frac{q}{\hbar}A_k)\Psi_\sigma \end{aligned}$$

für den Representanten Ψ_σ von Ψ zum Schnitt σ, wobei $\sigma^*\omega =: i\frac{q}{\hbar}A$ und $A_\nu := A(b_\nu)$ definiert wurde.

Insbesondere erkennt man, daß die Schrödinger-Differentialoperatoren im Allgemeinen von einander *verschieden* sind. Sowohl die verschiedenen Wahlmöglichkeiten einer Zusammenhangs-1-Form als auch eines inertialen Rahmens führen im Allgemeinen zu verschiedenen Schrödinger-Differentialoperatoren und somit auch zu verschiedenen Schrödingergleichungen!

Bemerkung:

Der Term $\sum_{k=1}^{3}\nabla_{b_k}\nabla_{b_k}$ im Schrödinger-Differentialoperator $D^{\omega}_{\underline{b}}$ ist unabhängig vom gewählten inertialen Rahmen $\underline{b} = (b_0, b) = (b_0, b_1, b_2, b_3)$, da sich bei einem anderen inertialen Rahmen $\underline{b}' = (b'_0, b') = (b'_0, b'_1, b'_2, b'_3)$ die raumartigen Vektorfelder b' nur um eine Drehspiegelung $b' = bR,\ R \in O(3)$ von b unterscheiden. Aus $\nabla_{rX+Y} = r\nabla_X + \nabla_Y,\ \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M),\ r \in \mathbb{R}$ und $R^tR = RR^t = \mathbf{1}_3,\ \forall R \in O(3)$ folgt dann die Invarianz des Operators $\sum_{k=1}^{3}\nabla_{b_k}\nabla_{b_k} =: D^{\omega}$.

Somit genügt es zur Definition eines Schrödinger-Differentialoperators eine Zusammenhangs-1-Form ω und ein paralleles Geschwingigkeitsvektorfeld V auf M, d.h. ein Vektorfeld $V : M \to T(M)$ mit $\theta(V) = 1$ und $\nabla V = 0$, zu wählen. Denn dann erhält man mit

$$D^{\omega}_{V} := i\hbar\nabla_V + \frac{\hbar^2}{2m}D^{\omega}$$

genau die Schrödinger-Differentialoperatoren von oben.

Im Folgenden werden die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Operatoren, Gleichungen und Lösungsmengen studiert.

„Eichinvarianz" der Schrödingergleichung:
Es stellt sich die Frage, ob und, wenn ja, wie die Schrödingergleichungen bzw. die Schrödinger-Differentialoperatoren zu verschiedenen, notwendigerweise durch eine Eichtransformation verknüpften, Zusammenhangs-1-Formen miteinander verbunden sind. Weil der Schrödinger-Differentialoperator $D^{\omega}_{\underline{b}}$ zu ω und $\underline{b}$ eine Linearkombination von hintereinander ausgeführten, kovarianten Ableitungen ist, läßt sich die Transformationsformel (2.15) mehrmals anwenden, sodaß man als Ergebnis erhält:

$$\boxed{D^{\tilde{\omega}}_{\underline{b}}\tilde{\Psi} = \widetilde{D^{\omega}_{\underline{b}}\Psi}}$$

Das heißt, daß Lösungen einer Schrödingergleichung bei gleichzeitiger Eichtransformation der Lösungen und der Zusammenhangs-1-Form in Lösungen der transformierten Schrödingergleichung übergehen:

$$D^{\omega}_{\underline{b}}\Psi = 0 \Leftrightarrow D^{\tilde{\omega}}_{\underline{b}}\tilde{\Psi} = 0 \;\text{ oder }\; ker(D^{\tilde{\omega}}_{\underline{b}}) = \widetilde{ker(D^{\omega}_{\underline{b}})}.$$

Bezeichnen wir die Eichtransformation von Wellenfunktionen Ψ mit einem

$$\Phi : P \to P : \Phi(x,u) = (x, e^{i\varphi(x)}u),\ \forall x \in M, u \in U(1)$$

mit $\tilde{\Psi} := e^{-i\varphi}\Psi$ und die inverse Transformation mittels Φ^{-1} mit $\hat{\Psi} := e^{i\varphi}\Psi$, so können wir die Lösungsmengen bijektiv ineinander abbilden:

$$\begin{array}{rcl} ker(D^{\tilde{\omega}}_{\underline{b}}) & \rightleftharpoons & ker(D^{\omega}_{\underline{b}}) \\ \tilde{\Psi} = e^{-i\varphi}\Psi & \leftarrow & \Psi \\ \Psi & \rightarrow & \hat{\Psi} = e^{i\varphi}\Psi \end{array}$$

Die Erwartungswerte der jeweiligen Orts- und Impulsoperatoren zu den entsprechenden Wellenfunktionen ändern sich nicht, vgl. Seite 33.

Änderung des inertialen Rahmens:
Das zweite Problem, das sich im Hinblick auf die Uneindeutigkeit der Schrödingergleichung stellt, ist die Abhängigkeit des Schrödinger-Differentialoperators vom gewählten inertialen Rahmen $\underline{b}$:
Gibt es zu zwei beliebigen inertialen Rahmen $\underline{b}_{(1)}$ und $\underline{b}_{(2)}$ immer Eichtransformationen $\Phi : P \to P$, sodaß sich die Änderung vom inertialen Rahmen $\underline{b}_{(1)}$ zum inertialen

Rahmen $\underline{b}_{(2)}$ *durch die Eichtransformation der Zusammenhangs-1-Form* ω *zu* $\tilde{\omega} = \Phi^*\omega$ *kompensieren läßt?*
Das würde bedeuten:

$$\boxed{D^{\omega}_{\underline{b}_{(1)}} = D^{\tilde{\omega}}_{\underline{b}_{(2)}}} \tag{2.17}$$

Die Antwort ist *JA* und üblicherweise unter dem Schlagwort „Galileitransformation in der Quantenmechanik“ in den einführenden Lehrbüchern der Quantentheorie zu finden, z.B. [Gal1, p.288ff.]. Die Rechnung dazu ist etwas länger, sodaß hier nur die wichtigsten Schritte ohne Details wiedergegeben werden:

Zu zwei inertialen Rahmen $\underline{b}_{(1)}$ und $\underline{b}_{(2)}$ gibt es genau eine Galileimatrix $\gamma \in \Gamma$, sodaß $\underline{b}_{(2)} = \underline{b}_{(1)}\gamma$ gilt. Wir schreiben genauer

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & R \end{pmatrix}, \; v = (v^1, v^2, v^3)^t \in \mathbb{R}^3, \; R \in O(3).$$

Als Ansatz für die Eichtransformation setzten wir

$$\Phi : P \to P : \Phi(x, u) = (x, e^{i\varphi(x)}u), \; \forall x \in M, u \in U(1).$$

Unter Verwendung eines Schnittes $\sigma : M \to P$ lassen sich mit Hilfe der Gleichung (2.14) alle kovarianten Ableitungen in den beiden Schrödinger-Differentialoperatoren $D^{\omega}_{\underline{b}_{(1)}}$ und $D^{\tilde{\omega}}_{\underline{b}_{(2)}}$ berechnen. Die gewünschte Gleichheit der Differentialoperatoren ergibt sich dann als äquivalent zu den zwei Forderungen

$$b_{(1)k}(\varphi) = -\frac{m}{\hbar}v^k, \quad k = 1, 2, 3 \quad \text{und} \tag{2.18}$$

$$b_{(1)0}(\varphi) = \frac{m}{\hbar}\frac{v^2}{2}. \tag{2.19}$$

Sei $\underline{B}_{(1)}$ der zu $\underline{b}_{(1)}$ duale Rahmen. Seien weiters für $\mu = 0, 1, 2, 3$ $x^{\mu}_{(1)} : M \to \mathbb{R}$ die bis auf eine additive Konstante bestimmten Funktionen auf M, die

$$dx^{\mu}_{(1)} = B^{\mu}_{(1)}, \; \forall \mu = 0, 1, 2, 3$$

erfüllen. Die Gleichungen (2.18) und (2.19) sind dann äquivalent zu

$$\boxed{d\varphi = \tfrac{m}{\hbar}\left(\tfrac{v^2}{2}dx^0_{(1)} - \textstyle\sum_{k=1}^{3} v^k dx^k_{(1)}\right)} \tag{2.20}$$

Man sieht, daß die Funktion $\varphi : M \to \mathbb{R}$ bis auf eine additive Konstante eindeutig durch die Galileimatrix $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & R \end{pmatrix}$ und den Rahmen $\underline{b}_{(1)}$ bestimmt ist. Weites fällt auf, daß nur „Boosts“ den Schrödinger-Differentialoperator ändern. Das heißt, daß das Differential der Funktion φ nur von v in γ abhängt, bzw. daß reine Drehspiegelungen des inertialen Rahmens $\underline{b}_{(1)}$ den Operator $D^{\omega}_{\underline{b}_{(1)}}$ invariant lassen, was man schon an dessen Form (Gleichung (2.16)) erkennen kann, vgl. auch die Bemerkung auf Seite 34. Als mögliche Eichtransformationen erhält man also Abbildungen

$$\begin{aligned} \Phi : P &\rightarrow P \\ \Phi(x,u) &= (x, e^{i\varphi(x)}u) \quad \text{mit} \\ \varphi &= \frac{m}{\hbar}\{\frac{v^2}{2}x^0_{(1)} - \sum_{k=1}^{3} v^k x^k_{(1)}\} + c,\ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die Unbestimmtheit in der additiven Konstanten c beeinflußt die Eichtransformation der Zusammenhangs-1-Form ω allerdings nicht, da sie sich nur in einer sogenannten globalen (=konstanten) Phasentransformation von ω ausdrückt. Gegenüber solchen ist ω jedoch invariant, vgl. Gleichung (2.4): mit $u := e^{ic}$ gilt $(\delta_u \circ \Phi)^*\omega = \Phi^*\omega$, weil $\delta_u^*\omega = \omega$.

Die Lösungsmengen der beiden Schrödingergleichungen

$$D^{\omega}_{\underline{b}_{(1)}}\Psi = 0 \text{ und } D^{\omega}_{\underline{b}_{(2)}}\Psi = 0$$

lassen sich nun, analog zur Situation der eichtransformierten Schrödinger-Differentialoperatoren, bijektiv ineinander abbilden. Wir bezeichnen dabei wieder die Eichtransformation von Wellenfunktionen Ψ mit einem Φ von oben mit $\tilde{\Psi} := e^{-i\varphi}\Psi$ und die inverse Transformation mittels Φ^{-1} mit $\hat{\Psi} := e^{i\varphi}\Psi$:

$$\begin{aligned} ker(D^{\omega}_{\underline{b}_{(1)}}) = ker(D^{\tilde{\omega}}_{\underline{b}_{(2)}}) &\rightleftharpoons ker(D^{\omega}_{\underline{b}_{(2)}}) \\ \tilde{\Psi} = e^{-i\varphi}\Psi &\leftarrow \Psi \\ \Psi &\rightarrow \hat{\Psi} = e^{i\varphi}\Psi \end{aligned}$$

BEMERKUNG:
Hat man, wie bei der Besprechung der „Eichinvarianz“ der Schrödingergleichung, zwei verschiedene Zusammenhangs-1-Formen ω und $\tilde{\omega}$ mit $d\omega = d\tilde{\omega} = \Omega$ vor sich, so ist die Eichtransformation $\Phi : P \rightarrow P : \Phi(x,v) = (x, e^{i\varphi(x)}v)$, die $\tilde{\omega} = \Phi^*\omega$ erreicht, nur bis auf eine **globale Phase** $u = e^{ic} \in U(1),\ c \in \mathbb{R}$ bestimmt ($\delta_u^*\omega = \omega$). Somit ist auch die zugehörige Eichtransformation der Wellenfunktionen $\Psi \mapsto \tilde{\Psi} := e^{-i\varphi}\Psi$ nur bis auf eine globale Phase $u \in U(1)$ bestimmt, d.h. $\tilde{\Psi} := e^{-i\varphi}\Psi$ ist gleichberechtigt zu $\tilde{\Psi} := ue^{-i\varphi}\Psi$. Welche Eichtransformation der Wellenfunktionen jedoch verwendet wird, ist im Bezug auf die *physikalische* Bedeutung der Wellenfunktion $\tilde{\Psi}$ irrelevant, da in der Berechnung von Erwartungswerten, vgl. Definition 2.3, eine globale Phasenänderung der Wellenfunktion keine Auswirkungen hat.

Ähnlich verhält es sich bei einem Wechsel des inertialen Rahmens, weil dieser eindeutig durch einen Wechsel in der Zusammenhangs-1-Form beschrieben werden kann, vgl. Gleichung (2.17).

Anwendung („Galilei-Invarianz“ der freien Schrödingergleichung):
Falls das elektromagnetische Feld F verschwindet, also $F = 0$, nennt man die zugehörigen Schrödingergleichungen „**frei**“. In diesem Fall gibt es zu einer gewählten Zusammenhangs-1-Form ω mit $d\omega = 0$ immer, vgl. [Kob1, p.92f.], einen Schnitt $\sigma : M \to P$, sodaß die Potential-1-Form A, definiert durch $\sigma^*\omega =: i\frac{q}{\hbar}A$, verschwindet, also $A = 0$. Wählt man zusätzlich einen inertialen Rahmen $\underline{b}_{(1)}$, dann lautet die zugehörige Schrödingergleichung:

$$\begin{aligned} i\hbar\nabla_{b_{(1)0}}\Psi &= -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{k=1}^{3}\nabla_{b_{(1)k}}\nabla_{b_{(1)k}}\Psi \quad \text{bzw.} \\ i\hbar b_{(1)0}\Psi_\sigma &= -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{k=1}^{3} b_{(1)k}b_{(1)k}\Psi_\sigma \end{aligned} \tag{2.21}$$

für den Representanten Ψ_σ von Ψ zum Schnitt σ. Bezüglich eines anderen inertialen Rahmens $\underline{b}_{(2)} = \underline{b}_{(1)}\gamma$ mit $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & R \end{pmatrix}$ gilt:

$$\begin{aligned} \Psi \in ker(D^\omega_{\underline{b}_{(1)}}) \quad &\Leftrightarrow \quad \hat{\Psi} = e^{i\varphi}\Psi \in ker(D^\omega_{\underline{b}_{(2)}}) \\ \text{mit} \quad \varphi &= \frac{m}{\hbar}\{\frac{v^2}{2}x^0_{(1)} - \sum_{k=1}^{3} v^k x^k_{(1)}\} + c, \ c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

und den Funktionen $x^\nu_{(1)}$, $\nu = 0, ..., 3$ wie weiter oben erklärt. Für die Schrödingergleichung bezüglich ω und $\underline{b}_{(2)}$ heißt das, daß die Lösungen $\Psi = [\sigma, \Psi_\sigma]$ der Schrödingergleichung zu ω und $\underline{b}_{(1)}$ durch die lokale Phasentransformation $e^{i\varphi}$ in bijektiver Weise in Lösungen der Schrödingergleichung zu ω und $\underline{b}_{(2)}$ übergehen:

$$\begin{aligned} i\hbar\nabla_{b_{(2)0}}(e^{i\varphi}\Psi) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{k=1}^{3}\nabla_{b_{(2)k}}\nabla_{b_{(2)k}}(e^{i\varphi}\Psi) \quad \text{bzw.} \\ i\hbar b_{(2)0}(e^{i\varphi}\Psi_\sigma) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{k=1}^{3} b_{(2)k}b_{(2)k}(e^{i\varphi}\Psi_\sigma). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Der Kartenausdruck der Gleichung (2.21) in einer inertialen Karte (φ_1, U_1) zu $\underline{b}_{(1)}$, d.h. $\underline{b}_{(1)} = \underline{\partial}^{\varphi_{(1)}}$, liefert die bekannte, freie Schrödingergleichung für eine komplexwertige Funktion

$$\psi_1 := \Psi_\sigma \circ \varphi_1^{-1} : V_1 := \varphi_1(U_1) \to \mathbb{C}$$

mit vier reellen Argumenten. Analog erhält man mit einer inertialen Karte (φ_2, U_2) zu $\underline{b}_{(2)}$, also $\underline{b}_{(2)} = \underline{\partial}^{\varphi(2)}$, mit $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ durch den Kartenausdruck der Gleichung (2.22) eine weitere komplexwertige Funktion

$$\psi_2 := (e^{i\varphi}\Psi_\sigma) \circ \varphi_2^{-1} : V_2 := \varphi_2(U_2) \to \mathbb{C}$$

mit vier reellen Argumenten, die ebenfalls die freie Schrödingergleichung erfüllt. Zwischen den Mengen $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$ und $\varphi_2(U_1 \cap U_2)$ gibt es nach Satz 1.5 eine lokale inhomogene Galileitransformation und zwischen den entsprechenden Einschränkungen der Funktionen ψ_1 und ψ_2 herrscht die bekannte Galileitransformation für Wellenfunktionen in der Quantenmechanik:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= (e^{-i\,\varphi\circ\varphi_1^{-1}}) \cdot \psi_2 \circ (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}), \\ \varphi_2 &= \gamma^{-1}\varphi_1 + a,\ a \in \mathbb{R}^4. \end{aligned}$$

Dieser Sachverhalt wird üblicherweise *„Galilei-Invarianz“ der freien Schrödingergleichung* genannt, wobei allerdings an der Bezeichnung „Invarianz“ zu zweifeln ist. Vergleiche dazu z.B. [Gal1, p.293].

Für die freie Schrödingergleichung (Zusammenhangs-1-Form ω mit $d\omega = 0$) auf einer **vollständigen** Galileischen Mannigfaltigkeit (M, θ, g, ∇) erhält man eine **Operation der Automorphismengruppe $\mathcal{A}(M, \theta, g, \nabla)$ auf der Lösungsmenge der freien Schrödingergleichung (modulo globale Phase)**:
Sei $\underline{b}$ ein inertialer Rahmen und $\varphi : M \to \mathbb{R}^4$ eine globale inertiale Karte, für die $\underline{b} = \underline{\partial}^\varphi$ gilt. Für jeden Automorphismus $f \in \mathcal{A}(M, \theta, g, \nabla)$ ist der Kartenausdruck $f_\varphi := \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ von f bzgl. der Karte φ eine inhomogene Galileitransformation des $\mathbb{R}^4$:

$$f_\varphi(\xi) = \gamma_{(f,\varphi)}\xi + a_{(f,\varphi)},\ \gamma_{(f,\varphi)} \in \Gamma, a_{(f,\varphi)} \in \mathbb{R}^4.$$

Wir bezeichnen mit $\phi_{(f,\varphi)} : M \to \mathbb{R}$ die Phasenfunktion, die durch $\gamma_{(f,\varphi)}$ und $\underline{b}$ bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist, vgl. Gleichung (2.20). Dann folgt mit analoger Argumentation zu oben (verwende $\varphi \circ f^{-1}$ als zweite globale Karte), daß

$$\hat{f}(\Psi) := e^{-i\,\phi_{(f,\varphi)}}\,(\Psi \circ f^{-1}) \tag{2.23}$$

Lösung der freien Schrödingergleichung zu $D^\omega_{\underline{b}}$ ist, falls Ψ es ist. Wir erhalten somit eine Linksoperation der Automorphismengruppe $\mathcal{A}(M, \theta, g, \nabla)$ auf den $U(1)$-Strahlen $U(1)\Psi$, $\Psi \in ker(D^\omega_{\underline{b}})$ der Lösungen der freien Schrödingergleichung zu $D^\omega_{\underline{b}}$:

$$\begin{aligned} L : \mathcal{A}(M, \theta, g, \nabla) \times \{U(1)\Psi,\ \Psi \in ker(D^\omega_{\underline{b}})\} &\to \{U(1)\Psi,\ \Psi \in ker(D^\omega_{\underline{b}})\} \\ (f, U(1)\Psi) &\mapsto L(f, U(1)\Psi) := U(1)\hat{f}(\Psi). \end{aligned}$$

Orts- und Impulsoperatoren bzw. deren Erwartungswerte zu zwei inertialen Rahmen:
Aus dem Abschnitt über Erwartungswerte von Orts- und Impulsoperatoren und mit Hilfe der Überführung der Lösungsmengen der Schrödingergleichungen zu zwei verschiedenen Zusammenhangs-1-Formen ω und $\tilde{\omega}$ mit $d\omega = d\tilde{\omega}$ (aber demselben inertialen Rahmen), erkennt man, daß die Vielfalt in der Wahlmöglichkeit einer Zusammenhangs-1-Form zu einer vorgegebenen elektromagnetischen Feldstärke F keinen Einfluß auf die physikalischen Aussagen der Theorie, d.h. die Berechnung der entsprechenden Erwartungswerte, hat.
Im Folgenden untersuchen wir das analoge Problem bezüglich der verschiedenen inertialen Rahmen, die man zur Definition einer Schrödingergleichung wählen kann, wobei nun immer dieselbe Zusammenhangs-1-Form verwendet wird:
Seien also $\underline{b}_{(1)}$ und $\underline{b}_{(2)}$ zwei inertiale Rahmen (mit dualen Rahmen $\underline{B}_{(1)}, \underline{B}_{(2)}$), die durch eine Galileimatrix γ miteinander verbunden sind,

$$\underline{b}_{(2)} = \underline{b}_{(1)}\gamma \quad \text{mit} \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & R \end{pmatrix}.$$

Weiters sei Ψ eine quadratintegrable, auf 1 normierte, Lösung zum Schrödinger-Differentialoperator $D^{\omega}_{\underline{b}_{(1)}}$ und $\hat{\Psi} = e^{i\varphi}\Psi$ die (bis auf eine globale Phase) entsprechende Lösung zum Schrödinger-Differentialoperator $D^{\omega}_{\underline{b}_{(2)}}$. Seien weiters für $i = 1, 2$ und $\mu = 0, 1, 2, 3$ $x^{\mu}_{(i)} : M \to \mathbb{R}$ die bis auf eine additive Konstante bestimmten Funktionen auf M, die $dx^{\mu}_{(i)} = B^{\mu}_{(i)}$, $\forall i = 1, 2$ und $\mu = 0, 1, 2, 3$ erfüllen. Es gilt für die Einschränkungen auf einen instantanen Raum $\Sigma \subset M$:

$$x^a_{(1)}|_{\Sigma} = \sum_{b=1}^{3} R^a_b x^b_{(2)}|_{\Sigma} + v^a t + s^a, \quad a = 1, 2, 3$$

für entsprechendes $t \in \mathbb{R}$ und $s = (s^1, s^2, s^3)^t \in \mathbb{R}^3$. Die Impulsoperatoren zu ω und den inertialen Rahmen $\underline{b}_{(1)}$ und $\underline{b}_{(2)}$ transformieren gemäß :

$$-i\hbar\nabla_{b_{(2)k}} = -i\hbar\nabla_{b_{(1)l}R^l_k} = -i\hbar R^l_k \nabla_{b_{(1)l}}, \; k = 1, 2, 3 \text{ (Summenkonvention)}.$$

Wir vergleichen nun die Berechnung von Orts- und Impulserwartungswerten der beiden „inertialen Beobachter“ $\underline{b}_{(1)}$ und $\underline{b}_{(2)}$:

$$\begin{aligned}
\langle \Psi, x^a_{(1)}\Psi \rangle &= \langle \Psi, e^{-i\varphi}e^{i\varphi}x^a_{(1)}\Psi \rangle \\
&= \langle \hat{\Psi}, x^a_{(1)}\hat{\Psi} \rangle \\
&= \langle \hat{\Psi}, (R^a_b x^b_{(2)} + v^a t + s)\hat{\Psi} \rangle \\
&= R^a_b \langle \hat{\Psi}, x^b_{(2)}\hat{\Psi} \rangle + \langle \hat{\Psi}, v^a t\hat{\Psi} \rangle + \langle \hat{\Psi}, s\hat{\Psi} \rangle \\
&= R^a_b \langle \hat{\Psi}, x^b_{(2)}\hat{\Psi} \rangle + v^a t + s.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir den „gewünschten“ Zusammenhang

$$\boxed{\mathbb{E}(X^a_{(1)}, \Sigma, \Psi) = R^a_b \, \mathbb{E}(X^b_{(2)}, \Sigma, \hat{\Psi}) + v^a t + s,\ a = 1,2,3.} \tag{2.24}$$

Interessanter ist die Angelegenheit bei den Erwartungswerten der Impusoperatoren zu $\underline{b}_{(1)}$ und $\underline{b}_{(2)}$ und ω, zumal sich z.B. bei einem reinen Boost

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1_3 \end{pmatrix}$$

die Impulsoperatoren zu den beiden inertialen Rahmen **nicht** unterscheiden, die entsprechenden Erwartungswerte sich allerdings um einen Relativimpuls mv unterscheiden sollen. Der gewünschte Effekt kann daher nur von der Transformation der Wellenfunktion durch den Beobachterwechsel herrühren.

Wir gehen aus vom allgemeinen Fall

$$\underline{b}_{(2)} = \underline{b}_{(1)}\gamma \quad \text{mit} \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & R \end{pmatrix}.$$

∇ bezeichnet die kovariante Ableitung zur Zusammenhangs-1-Form ω, $\tilde{\nabla}$ die zu $\Phi^*\omega$, $\hat{\Psi} := e^{i\varphi}\Psi$ und $\tilde{\Psi} := e^{-i\varphi}\Psi$, wobei die folgenden zu einander inversen Eichtransformationen Φ und χ eingeführt wurden:

$$\begin{aligned} \Phi(x,u) &= (x, e^{i\varphi(x)}u) \text{ mit} \\ \varphi &= \frac{m}{\hbar}\{\frac{v^2}{2}x^0_{(1)} - \sum_{k=1}^{3} v^k x^k_{(1)}\} + c,\ c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

und $\chi(x,u) = (x, e^{-i\varphi(x)}u)$. Weiters verwenden wir einen Schnitt $\sigma : M \to P$, womit wir $\Psi = [\sigma, \Psi_\sigma]$ schreiben, und wir benützen ferner das aus Gleichung (2.15) bekannte Transformationsverhalten.

$$\begin{aligned} \langle \hat{\Psi}, \nabla_{b_{(2)k}} \hat{\Psi} \rangle &= \langle \hat{\Psi}, \widehat{\tilde{\nabla}_{b_{(2)k}} \Psi} \rangle \\ &= \langle e^{i\varphi}\Psi, e^{i\varphi}\tilde{\nabla}_{b_{(2)k}} \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi, \tilde{\nabla}_{b_{(2)k}} \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi, [\sigma, b_{(2)k}\Psi_\sigma + \sigma^*\Phi^*\omega(b_{(2)k})\Psi_\sigma] \rangle \\ &= \langle \Psi, [\sigma, R^l_k(b_{(1)l}\Psi_\sigma) + (\sigma^*\omega + id\varphi)(b_{(1)l}R^l_k)\Psi_\sigma] \rangle \\ &= \langle \Psi, [\sigma, b_{(1)l}\Psi_\sigma + \sigma^*\omega(b_{(1)l})\Psi_\sigma] \rangle R^l_k + \langle \Psi, \Psi \rangle id\varphi(b_{(1)l}) R^l_k \\ &= \langle \Psi, \nabla_{b_{(1)l}} \Psi \rangle R^l_k - i\frac{m}{\hbar} v^l (R^t)^k_l \end{aligned}$$

und daher

$$\langle \Psi, \nabla_{b_{(1)l}} \Psi \rangle = \sum_{k=1}^{3} R^l_k \langle \hat{\Psi}, \nabla_{b_{(2)k}} \hat{\Psi} \rangle + i \frac{m}{\hbar} v^l.$$

Somit gilt für die Erwartungswerte der Impusoperatoren

$$\begin{aligned} P^a_{(1)} &= -i\hbar \nabla_{b_{(1)a}} \\ P^a_{(2)} &= -i\hbar \nabla_{b_{(2)a}} = (R^t)^a_b P^b_{(1)} \\ P^b_{(1)} &= R^b_a P^a_{(2)} \end{aligned}$$

für einen instantanen Raum Σ der folgende „gewünschten" Zusammenhang

$$\boxed{\mathbb{E}(P^a_{(1)}, \Psi, \Sigma) = \textstyle\sum_{b=1}^3 R^a_b \, \mathbb{E}(P^b_{(2)}, \hat{\Psi}, \Sigma) + m v^a, \ a = 1, 2, 3.} \tag{2.25}$$

Ergebnis:
Die zueinander inversen Bijektionen

$$\begin{aligned} \Psi &\mapsto \tilde{\Psi} = e^{-i\varphi} \Psi \\ \Psi &\mapsto \hat{\Psi} = e^{i\varphi} \Psi \end{aligned}$$

überführen also nicht nur Lösungen in irgendwelche Lösungen der entsprechenden Schrödingergleichungen zu zwei inertialen Beobachtern, sie bilden darüberhinaus Lösungen auf die Lösungen ab, die physikalisch den selben Zustand beschreiben.

Kapitel 3

Die Schrödingergleichungen auf $Gal(M)$

Im vorangehenden Kapitel wurde gezeigt, daß es keine „kanonische“ Schrödingergleichung auf einer Galileischen Raumzeit-Mannigfaltigkeit gibt. Neben der Uneindeutigkeit der minimalen Kopplung, muß insbesondere ein inertialer Beobachter ausgezeichnet werden.
Dieses Kapitel stellt die erste von zwei Untersuchungen der vorliegenden Arbeit dar, die letztere Vielfalt in der Definition von Schrödingergleichungen auf *eine* Gleichung auf einer anderen Mannigfaltigkeit zurückzuführen.

3.1 Induzierte Strukturen auf $Gal(M)$

Bezeichnungen:

Sei (M, θ, g, ∇) eine Galileische Mannigfaltigkeit. Aus Kapitel 1 kennen wir bereits das zugehörige Galileibündel $(Gal(M), \pi, M, \Gamma)$ mit

$$Gal(M) := \{\underline{b} = (b_0, b) \in L(M) : \theta(b_0) = 1, \theta(b) = 0, g(b^t, b) = 1_3\}.$$

Wir führen weiters das $U(1)$-Prinzipalfaserbündel

$$\mathbb{P} := Gal(M) \times U(1)$$

und das dazu assoziierte hermitesche Vektorbündel

$$\mathbb{E} := \mathbb{P} \times_{U(1)} \mathbb{C}$$

ein. Die hermitesche Fasermetrik $\langle ., . \rangle_\Gamma$ in $\mathbb{E}$ ist analog zu der in E erklärt durch

$$\langle [(\underline{b}, u_1), z_1], [(\underline{b}, u_2), z_2] \rangle_\Gamma := \overline{z_1 u_1} u_2 z_2$$

Mit den Definitionen

$$\begin{aligned} pr : \mathbb{P} &\rightarrow Gal(M) \\ (\underline{b}, u) &\mapsto pr(\underline{b}, u) := \underline{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{pr} : \mathbb{E} &\rightarrow Gal(M) \\ [(\underline{b}, u), z] &\mapsto \mathsf{pr}([(\underline{b}, u), z]) := \underline{b} \end{aligned}$$

erhalten wir also zusammenfassend das $U(1)$-Prinzipalfaserbündel $(\mathbb{P}, pr, Gal(M))$ und das dazu assoziierte hermiteschen Vektorbündel $(\mathbb{E}, \mathsf{pr}, Gal(M), \langle ., . \rangle_\Gamma)$. Schließlich brauchen wir noch die Projektionen

$$\begin{aligned} \bar{\pi} : \mathbb{P} := Gal(M) \times U(1) &\rightarrow P = M \times U(1) \\ (\underline{b}, u) &\mapsto \bar{\pi}(\underline{b}, u) := (\pi(\underline{b}), u), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} : \mathbb{E} := \mathbb{P} \times_{U(1)} \mathbb{C} &\rightarrow E := P \times_{U(1)} \mathbb{C} \\ [(\underline{b}, u), z] &\mapsto \tilde{\pi}([(\underline{b}, u), z]) := [(\pi(\underline{b}), u), z]. \end{aligned}$$

Wir erhalten zwei kommutative Diagramme von Projektionsabbildungen.

Für die beiden $U(1)$-Prinzipalfaserbündel:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P} & \xrightarrow{\bar{\pi}} & P \\ {\scriptstyle pr}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi_P} \\ Gal(M) & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

Für die beiden hermiteschen Vektorbündel:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E} & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & E \\ {\scriptstyle \mathsf{pr}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi_E} \\ Gal(M) & \xrightarrow{\pi} & M \end{array} \tag{3.1}$$

Induzierte Zusammenhänge auf $\mathbb{P}$:

(a) basische Zusammenhangs-1-Formen:

Die Abbildung $\bar{\pi} : \mathbb{P} \rightarrow P$ ist ein $U(1)$-Prinzipalfaserhomomorphismus. Es sei auf P ein Zusammenhang mit Zusammenhangs-1-Form ω zu einer elektromagnetischen Feldstärke-2-Form F auf M gewählt.

Nach [Kob1, p.81f.] gibt es genau einen Zusammenhang auf $\mathbb{P}$, sodaß dessen horizontale Unterräume durch $T\bar{\pi}$ in die des Zusammenhangs auf P abgebildet werden. Die Zusammenhangs-1-Form $\bar{\omega}$ dieses Zusammenhangs auf $\mathbb{P}$ ist gegeben durch

$$\bar{\omega} = \bar{\pi}^* \omega.$$

Bezeichnet $\Omega = d\omega$ die Krümmungs-2-Form von ω und $\bar{\Omega} = d\bar{\omega}$ die von $\bar{\omega}$, so gilt

$$\bar{\Omega} = \bar{\pi}^* \Omega.$$

Aus $\Omega = i\frac{q}{\hbar}\pi_P^* F$ erhalten wir weiters

$$\bar{\Omega} = i\frac{q}{\hbar}(\pi_P \circ \bar{\pi})^* F.$$

Durchläuft man mit ω alle zu $\Omega = i\frac{q}{\hbar}\pi_P^* F$ gehörenden Zusammenhangs-1-Formen (aktive Umeichung), so durchläuft $\bar{\omega}$ nicht alle Zusammenhangs-1-Formen auf $\mathbb{P}$, deren Krümmung $\bar{\Omega}$ ist.
Zum Zwecke einer genaueren Untersuchung führen wir die Rechtsoperation ρ der homogenen Galileigruppe Γ auf $\mathbb{P}$ ein:

$$\begin{array}{rcl} \rho : \mathbb{P} \times \Gamma & \to & \mathbb{P} \\ ((\underline{b}, u), \gamma) & \mapsto & \rho((\underline{b}, u), \gamma) := \rho_\gamma(\underline{b}, u) := (\underline{b}\gamma, u). \end{array}$$

Man kann also das Bündel $(\mathbb{P}, \bar{\pi}, P)$ als Γ-Prinzipalfaserbündel auffassen und somit die Bemerkungen von Seite 26 über basische Differentialformen auf einem Prinzipalfaserbündel verwenden. Das oben aus einem ω auf P definierte $\bar{\omega} = \bar{\pi}^*\omega$ auf $\mathbb{P}$ ist also basisch bezüglich der prinzipalen Faserung $(\mathbb{P}, \bar{\pi}, P, \Gamma)$, d.h.

$$\begin{array}{rcl} \bar{\omega}(V) & = & 0 \quad \text{für jeden vertikalen Vektor } V \text{ und} \\ \rho_\gamma^* \bar{\omega} & = & \bar{\omega}, \quad \forall \gamma \in \Gamma_3. \end{array}$$

Umgekehrt, jede basische Zusammenhangs-1-Form $\bar{\omega}$ auf $\mathbb{P}$, deren Krümmungs-2-Form

$$d\bar{\omega} = i\frac{q}{\hbar}(\pi_P \circ \bar{\pi})^* F$$

erfüllt, ist von der Form $\bar{\omega} = \bar{\pi}^*\omega$ für eine Zusammenhangs-1-Form ω auf P mit $d\omega = i\frac{q}{\hbar}\pi_P^* F$.

Wir erhalten also für jede elektromagnetische Feldstärke-2-Form eine bestimmte Klasse von Zusammenhangs-1-Formen $\bar{\omega}$ auf $\mathbb{P}$. Ein solches $\bar{\omega}$ nennen wir **basische** Zusammenhangs-1-Form zu F.

(b) galileivariante Zusammenhangs-1-Formen:
Wählt man auf einer Galileischen Mannigfaltigkeit (M, θ, g, ∇) einen inertialen Rahmen $\underline{b} : M \to Gal(M)$, so ist das Bild $\underline{b}(M)$ eine zu M diffeomorphe Untermannigfaltigkeit von $Gal(M)$. Der angesprochene Diffeomorphismus und dessen Umkehrabbildung sind gegeben durch

$$\underline{b} : M \to \underline{b}(M) \quad \text{und}$$

$$\pi\,|_{\underline{b}(M)} : \underline{b}(M) \to M.$$

Durchläuft man nun alle inertialen Rahmen, so erhält man eine Blätterung von $Gal(M)$ in zu M diffeomorphe Blätter $\underline{b}(M)$, die durch homogene Galileitransformationen eindeutig miteinander verknüpft sind, vgl. Satz 1.5:

$$\forall \text{ Blätter } \underline{b}_{(1)}(M),\ \underline{b}_{(2)}(M) \quad \exists_1 \gamma \in \Gamma \ : \ \underline{b}_{(2)}(M) = \underline{b}_{(1)}(M)\gamma.$$

Sei nun auf P ein Zusammenhang mit Zusammenhangs-1-Form ω_0 zu einer elektromagnetischen Feldstärke-2-Form F auf M gewählt. Ferner sei ein inertialer Rahmen $\underline{b}_{(0)} : M \to Gal(M)$ fixiert. Aus Kapitel 2 wissen wir, daß es zu jedem weiteren inertialen Rahmen $\underline{b} : M \to Gal(M),\ \underline{b} = \underline{b}_{(0)}\gamma$ genau eine Zusammenhangs-1-Form $\omega^{\underline{b}}$ auf P gibt, mit

$$D^{\omega^{\underline{b}}}_{\underline{b}} = D^{\omega_0}_{\underline{b}_{(0)}}.$$

$\omega^{\underline{b}}$ läßt sich schreiben als $\omega^{\underline{b}} = \Phi^*_\gamma \omega_0$, mit einer bis auf eine globale Phase eindeutig bestimmten Eichtransformation $\Phi_\gamma : P \to P$, die nicht nur von γ sondern auch von der Wahl von $\underline{b}_{(0)}$ abhängt! Schließlich wird noch daran erinnert, daß sich jedes Element von $\mathbb{P}$ eindeutig als $(\underline{b}(x), u)$ schreiben läßt, mit $\underline{b}$ inertialer Rahmen, $x \in M$ und $u \in U(1)$. Unter diesen Voraussetzungen definieren wir die zugehörige **galileivariante** Zusammenhangs-1-Form $\tilde{\omega}$ auf $\mathbb{P}$ durch

$$\tilde{\omega}_{(\underline{b}(x),u)} := (\bar{\pi}^* \omega^{\underline{b}})_{(\underline{b}(x),u)}, \ \ \forall\, \underline{b} \text{ inertialer Rahmen}, x \in M, u \in U(1).$$

Das so definierte $\tilde{\omega}$ ist eine Zusammenhangs-1-Form auf dem $U(1)$-Prinzipalfaserbündel $\mathbb{P}$, weil $\tilde{\omega}$ eine beliebig oft differenzierbare (verwende Trivialisierung und [Ish, p.159]) $i\mathbb{R}$-wertige 1-Form auf $\mathbb{P}$ ist und die charakteristischen Eigenschaften einer Zusammenhangs-1-Form auf einem Prinzipalfaserbündel mit kommutativer Strukturgruppe besitzt, vgl. [Kob1, p.64]:

(1) $\tilde{\omega}(A^*) = A,\ \forall A \in Lie(U(1)) = i\mathbb{R}$ mit A^* das zu A gehörende fundamentale, vertikale Vektorfeld auf $\mathbb{P}$, vgl.[Kob1, p.51, p.63].

(2) $\delta^*_v \tilde{\omega} = \tilde{\omega},\ \forall v \in U(1)$ mit $\delta_v : \mathbb{P} \to \mathbb{P} : \delta_v(\underline{b}(x), u) := (\underline{b}(x), uv)$ Rechtsoperation der Strukturgruppe $U(1)$ auf $\mathbb{P}$.
(gleiche Notation wie für $\delta_v : P \to P : \delta_v(x, u) = (x, uv)$)

Beweis.

(1) $\tilde{\omega}_{(\underline{b}(x),u)}(A^*(\underline{b}(x),u)) = \omega^{\underline{b}}_{(x,u)}(T_{(\underline{b}(x),u)}\bar{\pi}(A^*(\underline{b}(x),u))) = \omega^{\underline{b}}_{(x,u)}(A^*_P(x,u)) = A$, da $\omega^{\underline{b}}$ Zusammenhangs-1-Form; mit A^*_P dem zu A gehörenden fundamentalen Vektorfeld auf P. □

(2) direkte Rechnung:

$$\begin{aligned}
(\delta_v^*\tilde{\omega})_{(\underline{b}(x),u)} &= \tilde{\omega}_{(\underline{b}(x),uv)} \circ T_{(\underline{b}(x),u)}\delta_v \\
&= \omega^{\underline{b}}_{(x,uv)} \circ T_{(\underline{b}(x),uv)}\bar{\pi} \circ T_{(\underline{b}(x),u)}\delta_v \\
&= \omega^{\underline{b}}_{(x,uv)} \circ T_{(\underline{b}(x),u)}(\bar{\pi} \circ \delta_v) \\
&= \omega^{\underline{b}}_{(x,uv)} \circ T_{(\underline{b}(x),u)}(\delta_v \circ \bar{\pi}) \\
&= \omega^{\underline{b}}_{(x,uv)} \circ T_{(x,u)}\delta_v \circ T_{(\underline{b}(x),u)}\bar{\pi} \\
&= (\delta_v^*\omega^{\underline{b}})_{(x,u)} \circ T_{(\underline{b}(x),u)}\bar{\pi} \\
&= \tilde{\omega}_{(\underline{b}(x),u)}. \quad \square
\end{aligned}$$

Eigenschaften:

- $\tilde{\omega}$ ist eine *horizontale* Differentialform bezüglich der Faserung $(\mathbb{P}, \bar{\pi}, P)$, d.h. $\tilde{\omega}(V) = 0$ für jeden vertikalen Vektor V:

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_{(\underline{b}(x),u)}(V) &= \omega^{\underline{b}}_{(x,u)}(T_{(\underline{b}(x),u)}\bar{\pi}(V)) \\
&= \omega^{\underline{b}}_{(x,u)}(0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

- $\tilde{\omega}$ ist *„galileivariant“*, d.h. $(\underline{b}\gamma \times id_{U(1)})^*\tilde{\omega} = \Phi^*_\gamma(\underline{b} \times id_{U(1)})^*\tilde{\omega}$, $\forall\, \underline{b} : M \to Gal(M)$ inertialer Rahmen, $\forall\, \gamma \in \Gamma$, wobei Φ_γ eine zu $\underline{b}$ und γ gehörende Eichtransformation ist:

$$\begin{aligned}
((\underline{b}\gamma \times id_{U(1)})^*\tilde{\omega})_{(x,u)} &= \tilde{\omega}_{(\underline{b}(x)\gamma,u)} \circ T_{(x,u)}(\underline{b}\gamma \times id_{U(1)}) \\
&= (\bar{\pi}^*\omega^{\underline{b}\gamma})_{(\underline{b}(x)\gamma,u)} \circ T_{(x,u)}(\underline{b}\gamma \times id_{U(1)}) \\
&= (\omega^{\underline{b}\gamma})_{(x,u)} \circ T_{(\underline{b}(x)\gamma,u)}\bar{\pi} \circ T_{(x,u)}(\underline{b}\gamma \times id_{U(1)}) \\
&= (\omega^{\underline{b}\gamma})_{(x,u)} \circ T_{(x,u)} id_P \\
&= (\Phi^*_\gamma\omega^{\underline{b}})_{(x,u)}.
\end{aligned}$$

  Andererseites folgt aus dieser Rechnung auch $\omega^{\underline{b}} = (\underline{b} \times id_{U(1)})^*\tilde{\omega}$, wenn man $\gamma = \mathbf{1}_4$ setzt, und somit erhält man die Behauptung.

- Die Krümmungs-2-Form $\tilde{\Omega} = d\tilde{\omega}$ zu $\tilde{\omega}$ ist **nicht** dieselbe wie zu einer basischen Zusammenhangs-1-Form $\bar{\omega}$, wie eine etwas längere Rechnung mit Hilfe der Trivialisierung $Gal(M) \times U(1) \cong M \times \Gamma \times U(1)$ zum globalen Schnitt $\underline{b}_{(0)}$ zeigt, vgl.[Ish, p.132,159]. Es gilt jedoch

$$d((\underline{b} \times id_{U(1)})^* \tilde{\omega}) = i\frac{q}{\hbar}\pi_P^* F, \ \forall\, \underline{b} : M \to Gal(M) \text{ inertialer Rahmen.}$$

  Denn:

$$\begin{aligned}
((\underline{b} \times id_{U(1)})^* \tilde{\omega})_{(x,u)} &= \tilde{\omega}_{(\underline{b}(x),u)} \circ T_{(x,u)}(\underline{b} \times id_{U(1)}) \\
&= \omega^{\underline{b}}_{(x,u)} \circ T_{(\underline{b}(x),u)}\bar{\pi} \circ T_{(x,u)}(\underline{b} \times id_{U(1)}) \\
&= \omega^{\underline{b}}_{(x,u)} \circ T_{(x,u)}(\bar{\pi} \circ (\underline{b} \times id_{U(1)})) \\
&= \omega^{\underline{b}}_{(x,u)} \circ T_{(x,u)}(id_P) \\
&= \omega^{\underline{b}}_{(x,u)}, \quad \text{also} \\
(\underline{b} \times id_{U(1)})^* \tilde{\omega} &= \omega^{\underline{b}}.
\end{aligned}$$

Wie die basischen Zusammenhangs-1-Formen auf $\mathbb{P}$, lassen sich auch die galileivarianten Zusammenhangs-1-Formen, neben der konstruktiven Definition, eindeutig durch charakeristische Eigenschaften definieren:
Die **galileivarianten** Zusammenhangs-1-Formen $\tilde{\omega}$ zu einem F auf M sind genau jene Zusammenhangs-1-Formen auf $\mathbb{P}$, die folgende Eigenschaften erfüllen:

(1) $\tilde{\omega}(V) = 0$,
für jeden vertikalen Vektor V bezüglich der Faserung $(\mathbb{P}, \bar{\pi}, P)$.

(2) $(\underline{b}\gamma \times id_{U(1)})^* \tilde{\omega} = \Phi_\gamma^* (\underline{b} \times id_{U(1)})^* \tilde{\omega}$,
$\forall\, \underline{b} : M \to Gal(M)$ inertialer Rahmen, $\forall \gamma \in \Gamma$, wobei Φ_γ eine zu $\underline{b}$ und γ gehörende Eichtransformation ist. (Galileivarianz)

(3) $d((\underline{b} \times id_{U(1)})^* \tilde{\omega}) = i\frac{q}{\hbar}\pi_P^* F$,
$\forall\, \underline{b} : M \to Gal(M)$ inertialer Rahmen.

Die standardhorizontalen Vektorfelder auf $Gal(M)$:

In [Kob1, p.119] werden standardhorizontale Vektorfelder allgemeiner auf den Rahmenbündeln von Mannigfaltigkeiten mit linearen Zusammenhängen definiert. Die hier gegebene Definition ist an den Begriff der Galileischen Mannigfaltigkeit angepaßt und entspricht der Einschränkung der standardhorizontalen Vektorfelder aus [Kob1] auf das Galileibündel.

Definition 3.1 (standardhorizontale Vektorfelder) Sei (M, θ, g, ∇) eine Galileische Mannigfaltigkeit. Zu jedem $\xi \in \mathbb{R}^4$ (Spaltenraum) definieren wir das Vektorfeld B^ξ auf $Gal(M)$ durch:

(1) Die Vektoren $B^\xi(\underline{b})$ liegen in den horizontalen Unterräumen des linearen Zusammenhanges ∇(, der sich ja auf $Gal(M)$ einschränken läßt):

$$B^\xi(\underline{b}) \in H_{\underline{b}}(Gal(M)),\ \forall \underline{b} \in Gal(M).$$

(2) Die Projektion von $B^\xi(\underline{b})$ auf die Basismannigfaltigkeit M ergibt den Vektor $\underline{b}\xi \in T_{\pi(\underline{b})}(M)$:

$$T_{\underline{b}}\pi(B^\xi(\underline{b})) = \underline{b}\xi \in T_{\pi(\underline{b})}(M),\ \forall \underline{b} \in Gal(M).$$

Die Vektorfelder B^ξ sind durch (1) und (2) eindeutig charakterisiert, vgl. Eindeutigkeit des horizontalen Lifts [Kob1, p.64], und heißen **standardhorizontale Vektorfelder** zu $\xi \in \mathbb{R}^4$.

BEMERKUNGEN:

• *konkrete Berechnung:* Sei $\underline{b} : M \to Gal(M)$ ein inertialer Rahmen und $\xi \in \mathbb{R}^4$. An den Punkten $\underline{b}(x),\ x \in M$ läßt sich das standardhorizontale Vektorfelder B^ξ schreiben als

$$B^\xi(\underline{b}(x)) = T_x\underline{b}\,(\underline{b}(x)\xi).$$

Denn $\underline{b}(M)$ ist Integralmannigfaltigkeit zum Zusammenhang ∇, also gilt

$$\begin{aligned} T_x\underline{b}\,(T_x(M)) &= H_{\underline{b}(x)}(Gal(M)) \text{ horizontaler Unterraum bzgl.} \nabla \text{ bei } \underline{b}(x), \\ T_{\underline{b}(x)}\pi(T_x\underline{b}\,(\underline{b}(x)\xi)) &= T_x(\pi \circ \underline{b})(\underline{b}(x)\xi) = T_x id_M(\underline{b}(x)\xi) = \underline{b}(x)\xi. \end{aligned}$$

• *horizontaler Lift:* Mit Hilfe des Begriffs des *horizontalen Lifts* von Vektorfeldern bzw. einzelnen Tangentialvektoren von M nach $Gal(M)$, vgl. ([Ish, p.164], [Kob1, p.64]),

$$\begin{aligned} {}^\uparrow : \mathfrak{X}(M) &\to \mathfrak{X}(Gal(M)) \\ X &\mapsto X^\uparrow \text{ mit} \\ X^\uparrow(\underline{b}) &\in H_{\underline{b}}(Gal(M)), \\ T_{\underline{b}}\pi(X^\uparrow(\underline{b})) &= X(\pi(\underline{b}))),\ \forall \underline{b} \in Gal(M) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\text{für } \underline{b} \in Gal(M): \\ {}^{\uparrow\underline{b}} : T_{\pi(\underline{b})}(M) &\to H_{\underline{b}}(Gal(M)) \\ v &\mapsto v^{\uparrow\underline{b}} \text{ mit} \\ T_{\underline{b}}\pi(v^{\uparrow\underline{b}}) &= v \end{aligned}$$

läßt sich das standardhorizontale Vektorfelder B^ξ zu $\xi \in \mathbb{R}^4$ auch definieren durch

$$B^\xi(\underline{b}) := (\underline{b}\xi)^{\uparrow\underline{b}},\ \forall\, \underline{b} \in Gal(M).$$

Verwendet man nun für den $\mathbb{R}^4$ die kanonische Basis

$$\underline{\delta} := (\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3) := (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}),$$

so erhält man vier **kanonische Vektorfelder** $k_\mu, \ \mu = 0, 1, 2, 3$ auf $Gal(M)$, die allein durch die Struktur der Galileischen Mannigfaltigkeit (M, θ, g, ∇) bestimmt sind:

$$\boxed{\underline{k} := (k_0, k_1, k_2, k_3), \text{ mit } k_\mu := B^{\delta_\mu}.}$$

Alternative Definition durch horizontalen Lift:

$$\boxed{k_\mu(\underline{b}) := (b_\mu)^{\uparrow \underline{b}}, \text{ wobei } \underline{b} = (b_0, b_1, b_2, b_3) \in Gal(M).}$$

3.2 Die Schrödingergleichungen auf $Gal(M)$

Wir betrachten Schnitte $\Psi : Gal(M) \to \mathbb{E}$ und definieren Differentialoperatoren, die darauf operieren. Dabei bezeichnen wir mit $\bar{\nabla}$ die zu einer basischen Zusammenhangs-1-Form $\bar{\omega}$ gehörende kovariante Ableitung von Schnitten Ψ wie oben, und mit $\tilde{\nabla}$ die zu einer galileivarianten Zusammenhangs-1-Form $\tilde{\omega}$ gehörende kovariante Ableitung.

Definition 3.2 Sei (M, θ, g, ∇) eine Galileische Mannigfaltigkeit, F eine elektromagnetische Feldstärke-2-Form auf M und $\bar{\omega}$ bzw. $\tilde{\omega}$ eine basische Zusammenhangs-1-Form bzw. eine galileivariante Zusammenhangs-1-Form auf $\mathbb{P} = Gal(M) \times U(1)$ zu F. Seien ferner $\underline{k} = (k_0, k_1, k_2, k_3)$ die vier kanonischen Vektorfelder von (M, θ, g, ∇) auf $Gal(M)$. Der Operator

$$\boxed{\bar{\mathbb{D}} := i\hbar \bar{\nabla}_{k_0} + \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{l=1}^3 \bar{\nabla}_{k_k} \bar{\nabla}_{k_l}}$$

heißt **basischer Schrödinger-Differentialoperator** zu $\bar{\omega}$, und der Operator

$$\boxed{\tilde{\mathbb{D}} := i\hbar \tilde{\nabla}_{k_0} + \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{l=1}^3 \tilde{\nabla}_{k_k} \tilde{\nabla}_{k_l}}$$

heißt **galileivarianter Schrödinger-Differentialoperator** zu $\tilde{\omega}$.
Die zugehörige **basische Schrödingergleichung** für Schnitte $\Psi : Gal(M) \to \mathbb{E}$ lautet

$$\boxed{\bar{\mathbb{D}}\Psi = 0,}$$

und die **galileivariante Schrödingergleichung** lautet

$$\boxed{\tilde{\mathbb{D}}\Psi = 0.}$$

Wir untersuchen nun den Zusammenhang zwischen diesen Schrödingergleichungen auf $Gal(M)$ und jenen, im Kapitel 2 diskutierten, Schrödingergleichungen auf M, die jedoch die Auswahl eines inertialen Rahmens voraussetzen.
Sei also $\underline{b} : M \to Gal(M)$ ein inertialer Rahmen und $\Psi : Gal(M) \to \mathbb{E}$ ein Schnitt von $\mathbb{E}$. Auf Grund der Kommutativität des Diagramms (3.1) läßt sich dem Schnitt Ψ eindeutig ein Schnitt $\Psi_{\underline{b}} : M \to E$ zuordnen, der das folgende Diagramm kommutativ macht.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{E} \arrow[r, "\tilde{\pi}"] & E \\ Gal(M) \arrow[u, "\Psi"] & M \arrow[l, "\underline{b}"'] \arrow[u, "\Psi_{\underline{b}}"'] \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

In einem $\Psi : Gal(M) \to \mathbb{E}$ sind also Wellenfunktionen $\Psi_{\underline{b}} : M \to E$ zu jedem inertialen Rahmen $\underline{b}$ „übereinandergestapelt“. Aus dem Diagramm liest man ab

$$\Psi_{\underline{b}} = \tilde{\pi} \circ \Psi \circ \underline{b}\ .$$

Wir erhalten den folgenden

Satz 3.1 *Sei (M, θ, g, ∇) eine Galileische Mannigfaltigkeit, F eine elektromagnetische Feldstärke-2-Form und $\bar{\omega}$ bzw. $\tilde{\omega}$ eine basische Zusammenhangs-1-Form bzw. eine galileivariante Zusammenhangs-1-Form zu F. Sei weiters $\Psi : Gal(M) \to \mathbb{E}$ ein Schnitt von $\mathbb{E}$ und $\underline{b} : M \to Gal(M)$ ein inertialer Rahmen. Dann gilt*

(1) Ist Ψ Lösung der basischen Schrödingergleichung zu $\bar{\omega}$, dann ist $\Psi_{\underline{b}}$ Lösung der Schrödingergleichung zum inertialen Rahmen $\underline{b}$ und zur Zusammenhangs-1-Form $\omega := (\underline{b} \times id_{U(1)})^*\bar{\omega}$.

$$\boxed{\bar{\mathbb{D}}\Psi = 0 \Rightarrow D^{\omega}_{\underline{b}}\Psi_{\underline{b}} = 0} \tag{3.3}$$

(2) Ist Ψ Lösung der galileivarianten Schrödingergleichung zu $\tilde{\omega}$, dann ist $\Psi_{\underline{b}}$ Lösung der Schrödingergleichung zum inertialen Rahmen $\underline{b}$ und zur Zusammenhangs-1-Form $\omega := (\underline{b} \times id_{U(1)})^*\tilde{\omega}$.

$$\boxed{\tilde{\mathbb{D}}\Psi = 0 \Rightarrow D^{\omega}_{\underline{b}}\Psi_{\underline{b}} = 0} \tag{3.4}$$

Beweis.
Sei $\underline{b}: M \to Gal(M)$ ein inertialer Rahmen. Wir bezeichnen der notationellen Einfachheit halber mit h den $U(1)$-Prinzipalfaserhomomorphismus $\underline{b} \times id_{U(1)}$.

$$\begin{aligned} h : P = M \times U(1) &\;\to\; \mathbb{P} = Gal(M) \times U(1) \\ (x, u) &\;\mapsto\; h(x, u) := (\underline{b}(x), u) \end{aligned}$$

Den „vollständigen" $U(1)$-Prinzipalfaserhomomorphismus zeigt das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{h} & \mathbb{P} \\ {\scriptstyle \pi_P}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle pr} \\ M & \xrightarrow{\underline{b}} & Gal(M) \end{array}$$

Im Weiteren verwenden wir eine für den Beweis vorteilhafte Beschreibung von Schnitten in assoziierten Vektorbündeln und deren kovariante Ableitung, vgl. [Kob1, p.115], [Ish, p.149,173] und [Mar1, p.64f]:
Zu einem Schnitt $\Psi : Gal(M) \to \mathbb{E}$ gibt es eindeutig eine Funktion $f = i(\Psi)$, $f : \mathbb{P} \to \mathbb{C}$ mit der Äquivarianzeigenschaft $f \circ \delta_u = u^{-1} f,\ \forall u \in U(1)$, wobei $\delta_u : \mathbb{P} :\to \mathbb{P}$ die Rechtsoperation mit $u \in U(1)$ auf $\mathbb{P}$ bezeichnet, sodaß gilt

$$\Psi(\underline{b}) = [(\underline{b}, u), f(\underline{b}, u)],\ \forall \underline{b} \in Gal(M), u \in U(1).$$

Umgekehrt gibt es zu jeder Funktion $g : \mathbb{P} :\to \mathbb{C}$ mit obiger Äquivarianzeigenschaft genau einen Schnitt $\Phi = j(g)$, $\Phi : Gal(M) \to \mathbb{E}$, definiert durch

$$\Phi(\underline{b}) := [(\underline{b}, u), g(\underline{b}, u)],\ \forall \underline{b} \in Gal(M) \text{ und ein } u \in U(1),$$

sodaß die Zuordungen i und j invers zueinander sind. Für die entsprechenden Zuordnungen bei Schnitten von E bzw. äquivarianten Funktionen auf P verwenden wir dieselben Buchstaben i und j.
Ist nun etwa $\hat{\omega}$ eine Zusammenhangs-1-Form auf $\mathbb{P}$ mit zugehöriger kovarianter Ableitung $\hat{\nabla}$ und $X \in \mathfrak{X}(Gal(M))$ ein Vektorfeld auf $Gal(M)$, so gilt

$$i(\hat{\nabla}_X \Psi) = X^{\uparrow}(i(\Psi)),$$

wobei $X^{\uparrow}$ der horizontale Lift von X bezüglich des Zusammenhangs $\hat{\nabla}$ auf $\mathbb{P}$ bezeichnet, also $X^{\uparrow} \in \mathfrak{X}(\mathbb{P})$, vgl. Seite 49. Den horizontalen Lift von Vektorfeldern $Y \in \mathfrak{X}(M)$ bezüglich eines Zusammenhangs ∇ mit Zusammenhangs-1-Form ω auf $P = M \times U(1)$ bezeichnen wir ebenfalls mit $Y^{\uparrow}$, also $Y^{\uparrow} \in \mathfrak{X}(P)$.

Sei also $\hat{\omega} \in \{\bar{\omega}, \tilde{\omega}\}$ eine basische oder eine galileivariante Zusammenhangs-1-Form zu F und $\hat{\nabla} \in \{\bar{\nabla}, \tilde{\nabla}\}$ die zugehörige kovariante Ableitung. Wir verwenden die Bezeichnung $f = i(\Psi)$ und berechnen

$$\begin{aligned} i((\hat{\nabla}_{k_\nu} \Psi)_{\underline{b}}) &= i(j(k_\nu^{\uparrow}(f))_{\underline{b}}) \\ &= k_\nu^{\uparrow}(f) \circ h \\ &= \langle df, k_\nu^{\uparrow} \rangle \circ h. \end{aligned}$$

Ferner gilt $k_\nu^\uparrow \circ h = Th \circ b_\nu^\uparrow$, vgl. Seite 49, wobei $b_\nu^\uparrow$ der horizontale Lift von b_ν bezüglich der Zusammenhangs-1-Form $\omega := h^*\hat{\omega} = (\underline{b} \times id_{U(1)})^*\hat{\omega}$ auf P ist. Daher erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} i((\hat{\nabla}_{k_\nu}\Psi)_{\underline{b}}) &= \langle df, Th \circ b_\nu^\uparrow \circ h^{-1}\rangle \circ h \\ &= \langle h^* df, b_\nu^\uparrow \rangle \\ &= b_\nu^\uparrow(f \circ h) \\ &= b_\nu^\uparrow(i(\Psi_{\underline{b}})) \\ &= i(\nabla_{b_\nu}\Psi_{\underline{b}}), \end{aligned}$$

wobei die zu ω gehörende kovariante Ableitung mit ∇ bezeichnet wurde. Insgesamt haben wir

$$\boxed{(\hat{\nabla}_{k_\nu}\Psi)_{\underline{b}} = \nabla_{b_\nu}\Psi_{\underline{b}}.} \tag{3.5}$$

Durch mehrmaliges Anwenden der Formel (3.5) auf die basische bzw. galileivariante Schrödingergleichung $\bar{\mathbb{D}}\Psi = 0$ bzw. $\tilde{\mathbb{D}}\Psi = 0$ und unter Verwendung von $(\alpha\Psi + \Phi)_{\underline{b}} = \alpha\Psi_{\underline{b}} + \Phi_{\underline{b}}$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ und Schnitte Ψ und Φ von $\mathbb{E}$ erhalten wir schließlich die gewünschten Inklusionen (3.3) und (3.4). $\square$

Der Satz zeigt, daß die Lösungen der beiden Schrödingergleichungen auf $Gal(M)$ durch Einschränkung auf die zu M diffeomorphen Blätter $\underline{b}(M)$ von $Gal(M)$ zu Lösungen von Schrödingergleichungen auf M mit inertialem Rahmen $\underline{b}$ werden. Gehört die, für die Schrödingergleichung auf $Gal(M)$ verwendete, Zusammenhangs-1-Form $\hat{\omega}$ zur elektomagnetischen Feldstärke F, so ist die für die entsprechende Schrödingergleichung auf M im Satz angegebene Zusammenhangs-1-Form ω durch $d\omega = i\frac{q}{\hbar}\pi_P^* F$ mit F verbunden, vgl. Seiten 45 und 48. Die elektromagnetische Einwirkung wird also, wie gewünscht, nicht verändert.
Es stellt sich die Frage, ob die beschriebene Prozedur des Einschränkens einer Lösung Ψ auf $Gal(M)$ zu einer Lösung $\Psi_{\underline{b}}$ auf M verschiedene oder dieselben physikalischen Zustandsabfolgen durch $\Psi_{\underline{b}}$ beschreibt, wenn man verschiedene inertiale Rahmen $\underline{b}$ verwendet. Der folgende Abschnitt wird zeigen, daß die Lösungsmengen der Schrödingergleichungen auf $Gal(M)$ zu „groß“ sind, d.h. es gibt elektomagnetische Feldstärken F und Lösungen Ψ, die zu verschiedenen inertialen Rahmen $\underline{b}$ verschiedene physikalische Zustandsabfolgen durch die entsprechenden $\Psi_{\underline{b}}$ beschreiben. Dieses Problem läßt sich allerdings lösen, indem die Lösungsmengen der Schrödingergleichungen auf $Gal(M)$ eingeschränkt werden auf Schnitte Ψ, die bestimmte Äquivarianzbedingungen bezüglich der Operation der Galileigruppe Γ auf $Gal(M)$ bzw. den Schnitten Ψ erfüllen. Die so erhaltenen Lösungen bezeichnen wir dann als physikalische Lösungen der Schrödingergleichungen auf $Gal(M)$.

3.3 Physikalische Lösungen

Intergation auf den instantanen Räumen der Blätter von $Gal(M)$:
Wir wissen, vgl. Seite 46, daß M diffeomorph zu den Blättern $\underline{b}(M)$ von $Gal(M)$ ist. Zu jedem instantanen Raum Σ von M wurde bereits die Integration von Funktionen auf Σ erklärt, indem kanonische Dichten $|\mu_\Sigma|$ auf Σ eingeführt wurden. Diese lassen sich wiederum mit Hilfe eines inertialen Rahmens $\underline{b}$ mit Dualrahmen $\underline{B} = (B^0, B^1, B^2, B^3)^t$ als

$$|\mu_\Sigma| = \left|(B^1 \wedge B^2 \wedge B^3)|_\Sigma\right|$$

schreiben, vgl. Kapitel 2. Mittels der kanonischen Vektorfelder auf $Gal(M)$ erklären wir nun die Integration von Funktionen auf den instantanen Räumen $\underline{b}(\Sigma)$ eines Blattes $\underline{b}(M)$, wobei man erkennen wird, daß sich diese Integrale auf Integrale von Funktionen auf Σ reduzieren lassen.
Sei Σ ein instantaner Raum und $\underline{b}$ ein inertialer Rahmen. Es gilt, daß $\underline{b}\,|_\Sigma\colon \Sigma \to \underline{b}(\Sigma)$ ein Diffeomorphismus mit Umkehrabbildung $\pi\,|_{\underline{b}(\Sigma)}\colon \underline{b}(\Sigma) \to \Sigma$ ist. Die Einschränkung $b|_\Sigma$ der drei raumartigen Vektorfelder $b = (b_1, b_2, b_3)$ auf Σ liefert einen orthonormalen Rahmen von Σ. Die Einschränkung $k|_{\underline{b}(\Sigma)}$ der drei kanonischen Vektorfelder $k = (k_1, k_2, k_3)$ auf $\underline{b}(\Sigma)$ liefert einen Rahmen von $\underline{b}(\Sigma)$ und läßt sich aus $b|_\Sigma$ durch die Tangentialabbildung von $\underline{b}\,|_\Sigma$ berechnen, vgl. Seite 49. Für $a = 1, 2, 3$ gilt

$$k_a\,|_{\underline{b}(\Sigma)} = T\,\underline{b}\,|_\Sigma \circ b_a|_\Sigma \circ \pi\,|_{\underline{b}(\Sigma)} = (\underline{b}\,|_\Sigma)_*\; b_a\,|_\Sigma \quad \text{(pushforward)}.$$

Mit $K|_{\underline{b}(\Sigma)} = (K^1|_{\underline{b}(\Sigma)}, K^2|_{\underline{b}(\Sigma)}, K^3|_{\underline{b}(\Sigma)})^t$ sei der duale Rahmen zu $k|_{\underline{b}(\Sigma)}$ bezeichnet. Wir definieren eine orientierte Volumsform $\mu_{\underline{b}(\Sigma)}$ auf $\underline{b}(\Sigma)$ durch

$$\mu_{\underline{b}(\Sigma)} := K^1|_{\underline{b}(\Sigma)} \wedge K^2|_{\underline{b}(\Sigma)} \wedge K^3|_{\underline{b}(\Sigma)}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \mu_{\underline{b}(\Sigma)} &= (\pi\,|_{\underline{b}(\Sigma)})^* \mu_\Sigma \text{ bzw.} \\ \mu_\Sigma &= (\underline{b}\,|_\Sigma)^* \mu_{\underline{b}(\Sigma)}, \end{aligned}$$

weil $(\pi|_{\underline{b}(\Sigma)})^* B^a|_\Sigma = K^a\,|_{\underline{b}(\Sigma)}$ bzw. $(\underline{b}\,|_\Sigma)^* K^a\,|_{\underline{b}(\Sigma)} = B^a|_\Sigma,\ \forall a = 1, 2, 3$ gilt. Somit läßt sich zu jedem inertialen Rahmen $\underline{b}$ und jedem instantanen Raum Σ das Integral einer Funktion $f : \underline{b}(\Sigma) \to \mathbb{R}$ erklären als

$$\int_{\underline{b}(\Sigma)} f \left|\mu_{\underline{b}(\Sigma)}\right| .$$

Andererseits können wir die Funktion $g := f \circ \underline{b}\,|_\Sigma\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ auf Σ integrieren. Die Transformationsformel für Dichten liefert dann den Zusammenhang

$$\int_\Sigma g\,|\mu_\Sigma| = \int_\Sigma (\underline{b}\,|_\Sigma)^* f \;\; (\underline{b}\,|_\Sigma)^* \left|\mu_{\underline{b}(\Sigma)}\right| = \int_{\underline{b}(\Sigma)} f \left|\mu_{\underline{b}(\Sigma)}\right| .$$

Orts- und Impulserwartungswerte:
Sei $\hat{\omega} \in \{\bar{\omega}, \tilde{\omega}\}$ eine basische oder eine galileivariante Zusammenhangs-1-Form zu einem F und $\hat{\nabla} \in \{\bar{\nabla}, \tilde{\nabla}\}$ die zugehörige kovariante Ableitung. Weiters seien für $\mu = 0, 1, 2, 3$ $x^\mu : M \to \mathbb{R}$ vier Funktionen mit der Eigenschaft, daß $(dx^o, dx^1, dx^2, dx^3)^t$ ein inertialer Dualrahmen ist, vgl. Seite 32.
Sei $\Psi : Gal(M) \to \mathbb{E}$ ein Schnitt von $\mathbb{E}$. Zu jedem inertialen Rahmen $\underline{b}$ und jedem instantanen Raum Σ haben wir zwei abgeleitete Funktionen

$$\begin{aligned} \Psi\,|_{\underline{b}(\Sigma)} &: \underline{b}(\Sigma) \to \mathbb{E}, \\ \Psi_{\underline{b}}\,|_\Sigma &: \Sigma \to E. \end{aligned}$$

Zu zwei Schnitten Ψ und Φ von $\mathbb{E}$ bilden wir die beiden reellwertigen Funktionen

$$\begin{aligned} \langle \Psi\,|_{\underline{b}(\Sigma)}, \Phi\,|_{\underline{b}(\Sigma)} \rangle_\Gamma : \underline{b}(\Sigma) \to \mathbb{R} &: \langle \Psi\,|_{\underline{b}(\Sigma)}, \Phi\,|_{\underline{b}(\Sigma)} \rangle(y) := \langle \Psi\,|_{\underline{b}(\Sigma)}\,(y), \Phi\,|_{\underline{b}(\Sigma)}\,(y) \rangle_\Gamma \\ \langle \Psi_{\underline{b}}\,|_\Sigma, \Phi_{\underline{b}}\,|_\Sigma \rangle : \Sigma \to \mathbb{R} &: \langle \Psi_{\underline{b}}\,|_\Sigma, \Phi_{\underline{b}}\,|_\Sigma \rangle(x) := \langle \Psi_{\underline{b}}\,|_\Sigma\,(x), \Phi_{\underline{b}}\,|_\Sigma\,(x) \rangle \end{aligned}$$

Ein Schnitt Ψ von $\mathbb{E}$ heißt *auf eins normiert*, falls für alle inertialen Rahmen $\underline{b}$ und instantanen Räume Σ gilt, daß

$$\int_{\underline{b}(\Sigma)} \langle \Psi\,|_{\underline{b}(\Sigma)}, \Psi\,|_{\underline{b}(\Sigma)} \rangle_\Gamma \left| \mu_{\underline{b}(\Sigma)} \right| = \int_\Sigma \langle \Psi_{\underline{b}}\,|_\Sigma, \Psi_{\underline{b}}\,|_\Sigma \rangle \left| \mu_\Sigma \right| = 1, \tag{3.6}$$

wobei die erste Gleichheit in (3.6) auf Grund der Transformationsformel für Dichten und der Tatsache

$$\langle \Psi\,|_{\underline{b}(\Sigma)}, \Phi\,|_{\underline{b}(\Sigma)} \rangle_\Gamma = \langle \Psi_{\underline{b}}\,|_\Sigma, \Phi_{\underline{b}}\,|_\Sigma \rangle \circ \pi|_{\underline{b}(\Sigma)}, \tag{3.7}$$

für Schnitte Ψ und Φ von $\mathbb{E}$ gilt.

Definition 3.3 (Orts- und Impulsoperatoren) Die drei *Ortsoperatoren* $\mathbb{X}^a$, $a = 1, 2, 3$ zum oben gewählten Beobachter mit „Ursprung“, vgl. Bemerkung Seite 32, sind definiert als

$$\begin{aligned} \mathbb{X}^a : Sec(\mathbb{E}) &\to Sec(\mathbb{E}) \\ \Psi &\mapsto \mathbb{X}^a(\Psi) := \pi^* x^a\ \Psi = (x^a \circ \pi)\Psi \end{aligned}$$

und die drei *Impulsoperatoren* $\mathbb{P}^a$, $a = 1, 2, 3$ zur gewählten Zusammenhangs-1-Form $\hat{\omega}$ als

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^a : Sec(\mathbb{E}) &\to Sec(\mathbb{E}) \\ \Psi &\mapsto \mathbb{P}^a(\Psi) := -i\hbar \hat{\nabla}_{k_a} \Psi. \end{aligned}$$

Bemerkung:
Die Definition der Impulsoperatoren für Schnitte von $\mathbb{E}$ hängt nur noch von der gewählten Zusammenhangs-1-Form $\hat{\omega}$ ab, es müssen, im Gegensatz zu den Impulsoperatoren für Schnitte von E, vgl. Seite 32, keine Vektorfelder *gewählt* werden, nach denen kovariant abgeleitet wird.

Wir betrachten nun eine auf eins normierte Lösung $\Psi : Gal(M) \to \mathbb{E}$ der Gleichung $\hat{\mathbb{D}}\Psi = 0$ (basische oder galileivariante Schrödingergleichung), sowie einen instantanen Raum Σ und einen inertialen Rahmen $\underline{b} : M \to Gal(M)$.

Definition und Satz 3.1 (Erwartungswerte) Der *Erwartungswert* $\mathbb{E}(\mathbb{X}^a, \Sigma, \underline{b}, \Psi)$ des Ortsoperators $\mathbb{X}^a$, $a \in \{1,2,3\}$ zum instantanen Raum Σ, zum inertialen Rahmen[1] $\underline{b}$ und zu Ψ ist definiert als:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbb{X}^a, \Sigma, \underline{b}, \Psi) \quad &:= \quad \int_{\underline{b}(\Sigma)} \langle \Psi\,|_{\underline{b}(\Sigma)}, (\mathbb{X}^a(\Psi))\,|_{\underline{b}(\Sigma)}\rangle_\Gamma \left|\mu_{\underline{b}(\Sigma)}\right| \\
&= \quad \int_{\underline{b}(\Sigma)} \langle \Psi\,|_{\underline{b}(\Sigma)}, (\pi^* x^a\ \Psi)\,|_{\underline{b}(\Sigma)}\rangle_\Gamma \left|\mu_{\underline{b}(\Sigma)}\right| \\
&= \quad \int_{\Sigma} \langle \Psi_{\underline{b}}\,|_\Sigma, (x^a\ \Psi_{\underline{b}})\,|_\Sigma\rangle \left|\mu_\Sigma\right| .
\end{aligned}
$$

Der *Erwartungswert* $\mathbb{E}(\mathbb{P}^a, \Sigma, \underline{b}, \Psi)$ des Impulsoperators $\mathbb{P}^a$, $a \in \{1,2,3\}$ zum instantanen Raum Σ, zum inertialen Rahmen $\underline{b}$ und zu Ψ ist definiert als:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbb{P}^a, \Sigma, \underline{b}, \Psi) \quad &:= \quad \int_{\underline{b}(\Sigma)} \langle \Psi\,|_{\underline{b}(\Sigma)}, (\mathbb{P}^a(\Psi))\,|_{\underline{b}(\Sigma)}\rangle_\Gamma \left|\mu_{\underline{b}(\Sigma)}\right| \\
&= \quad \int_{\underline{b}(\Sigma)} \langle \Psi\,|_{\underline{b}(\Sigma)}, (-i\hbar\hat{\nabla}_{k_a}\Psi)\,|_{\underline{b}(\Sigma)}\rangle_\Gamma \left|\mu_{\underline{b}(\Sigma)}\right| \\
&= \quad \int_{\underline{b}(\Sigma)} \langle \Psi_{\underline{b}}\,|_\Sigma, (-i\hbar\hat{\nabla}_{k_a}\Psi)_{\underline{b}}\,|_\Sigma\rangle \circ \pi|_{\underline{b}(\Sigma)} \left|\mu_{\underline{b}(\Sigma)}\right| \\
&= \quad \int_{\underline{b}(\Sigma)} \langle \Psi_{\underline{b}}\,|_\Sigma, (-i\hbar\nabla_{b_a}\Psi_{\underline{b}})\,|_\Sigma\rangle \circ \pi|_{\underline{b}(\Sigma)} \left|\mu_{\underline{b}(\Sigma)}\right| \\
&= \quad \int_{\Sigma} \langle \Psi_{\underline{b}}\,|_\Sigma, (-i\hbar\nabla_{b_a}\Psi_{\underline{b}})\,|_\Sigma\rangle \left|\mu_\Sigma\right| .
\end{aligned}
$$

Mit ∇ wurde die zur Zusammenhangs-1-Form $\omega := (\underline{b} \times id_{U(1)})^*\hat{\omega}$ gehörende kovariante Ableitung bezeichnet. Ferner gingen in den obigen Berechnungen Gleichung (3.5), Gleichung (3.7) und die Transformationsformel für Dichten ein.
Der *Erwartungswert* $\mathbb{E}(\mathbb{O}, \Sigma, \underline{b}, \Psi)$ eines allgemeinen Operators $\mathbb{O}$ auf den Schnitten

[1] Üblicherweise nur solche $\underline{b}$ mit $(dx^o, dx^1, dx^2, dx^3)^t$ dual zu $\underline{b}$.

von $\mathbb{E}$ (z.B. Linearkombinationen von Produkten von Orts- und Impulsoperatoren) zum instantanen Raum Σ, zum inertialen Rahmen $\underline{b}$ und zu Ψ ist definiert als:

$$\mathbb{E}(\mathbb{O}, \Sigma, \underline{b}, \Psi) \;\; := \;\; \int_{\underline{b}(\Sigma)} \langle \Psi\,|_{\underline{b}(\Sigma)}, (\mathbb{O}(\Psi))\,|_{\underline{b}(\Sigma)} \rangle_\Gamma \left|\mu_{\underline{b}(\Sigma)}\right| .$$

Vergleicht man die Ergebnisse mit der Definition von Erwartungswerten für Wellenfunktionen auf M im zweiten Kapitel, so folgt für alle $a \in \{1, 2, 3\}$

$$\mathbb{E}(\mathbb{X}^a, \Sigma, \underline{b}, \Psi) \;=\; \mathbb{E}(X^a, \Sigma, \Psi_{\underline{b}}) \tag{3.8}$$
$$\mathbb{E}(\mathbb{P}^a, \Sigma, \underline{b}, \Psi) \;=\; \mathbb{E}(P^a, \Sigma, \Psi_{\underline{b}}), \tag{3.9}$$

wobei X^a der Ortsoperator zur Funktion x^a von oben ist, und P^a der Impulsoperator zum Vektorfeld b_a aus $\underline{b}$ und zur Zusammenhangs-1-Form ω ist.

Ohne weitere Forderung an die Schnitte Ψ sind jedoch **unphysikalische** Zustandsabfolgen vom folgenden Typ als Lösungen der Schrödingergleichungen auf $Gal(M)$ möglich:
Sei $F = 0$ das freie elektromagnetische Feld auf einer vollständigen Galileischen Mannigfaltigkeit (M, θ, g, ∇) und ω eine zugehörige Zusammenhangs-1-Form auf P, also $d\omega = 0$. Sei weiters $\underline{b}_{(0)}$ ein inertialer Rahmen und $\Psi_{\underline{b}_{(0)}} : M \to E$ eine auf eins normierte Lösung der freien Schrödingergleichung $D^\omega_{\underline{b}_{(0)}} \Psi_{\underline{b}_{(0)}} = 0$. Wir konstruieren nun einen Schnitt $\tilde{\Psi} : Gal(M) \to \mathbb{E}$, der die basische Schrödingergleichung $\bar{\mathbb{D}}\tilde{\Psi} = 0$ zu $\bar{\omega} := \bar{\pi}^*\omega$ löst, jedoch unphysikalisch zusammenhängende Ortserwartungswerte zu voneinander verschiedenen, weiteren inertialen Rahmen $\underline{b}$ hat.
Sei $f : \Gamma \to \mathcal{A}(M, \theta, g, \nabla)$ eine nichtkonstante, beliebig oft differenzierbare Abbildung in die Automorphismengruppe von (M, θ, g, ∇). Wir definieren nun $\tilde{\Psi}$ durch dessen Werte auf den Blättern von $Gal(M)$, vgl. Diagramm (3.2)

$$\tilde{\Psi}_{\underline{b}_{(0)}\gamma} := e^{i\varphi_\gamma}(\widehat{f(\gamma)}(\Psi_{\underline{b}_{(0)}})), \;\forall \gamma \in \Gamma,$$

wobei φ_γ eine zum inertialen Rahmenwechsel $\underline{b}_{(0)} \to \underline{b}_{(0)}\gamma$ gehörende Phasenfunktion auf M ist, vgl. Seite 36, und $\widehat{f(\gamma)}(\Psi_{\underline{b}_{(0)}})$ die um $f(\gamma)$ „verschobene“ Lösung von $\Psi_{\underline{b}_{(0)}}$ zu $D^\omega_{\underline{b}_{(0)}}$ ist, vgl. Gleichung (2.23). Auf Grund der Formel (3.5), sowie der „Galilei-Invarianz“ der freien Schrödingergleichung folgt, daß das so definierte $\tilde{\Psi}$ die basische Schrödingergleichung $\bar{\mathbb{D}}\tilde{\Psi} = 0$ erfüllt. Jedoch sind die Ortserwartungswerte

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbb{X}^a, \Sigma, \underline{b} = \underline{b}_{(0)}\gamma, \tilde{\Psi}) &= \mathbb{E}(X^a, \Sigma, \tilde{\Psi}_{\underline{b}}) \\
&= \mathbb{E}(X^a, \Sigma, e^{i\varphi_\gamma}(\widehat{f(\gamma)}(\Psi_{\underline{b}_{(0)}}))) \\
&= \mathbb{E}(X^a, \Sigma, \Psi_{\underline{b}_{(0)}} \circ f(\gamma)^{-1})
\end{aligned}$$

durch die Funktion f in Abhängigkeit des inertialen Rahmens $\underline{b} = \underline{b}_{(0)}\gamma$ „beliebig verschoben“. Mit anderen Worten, für die zwei inertialen Rahmen $\underline{b}_{(0)}$ und $\underline{b} = \underline{b}_{(0)}\gamma$ (mit dualen Rahmen $\underline{B}_{(0)}$ und $\underline{B}$) und jeweils dazu gewählten Funktionen $x^\mu_{(0)} : M \to \mathbb{R}$ und $x^\mu : M \to \mathbb{R}$, $\mu = 0,1,2,3$ ($dx^\mu_{(0)} = B^\mu_{(0)}$ und $dx^\mu = B^\mu$ für $\mu = 0,1,2,3$), die die Ortsoperatoren $X^a_{(0)}$, X^a bzw. $\mathbb{X}^a_{(0)}$, $\mathbb{X}^a$ $a \in \{1,2,3\}$ bestimmen, gilt auf Grund der Verschiebung durch f die der Transformationsformel (2.24) entsprechende Transformationsformel

$$\mathbb{E}(\mathbb{X}^a_{(0)}, \Sigma, \underline{b}_{(0)}, \tilde{\Psi}) = R^a_b\, \mathbb{E}(\mathbb{X}^b, \Sigma, \underline{b}, \tilde{\Psi}) + v^a t + s, \quad a = 1,2,3$$

nicht mehr. Der Schnitt $\bar{\Psi}$ ist also eine Lösung der basischen Schrödingergleichung $\bar{\mathbb{D}}\bar{\Psi} = 0$, beschreibt jedoch keine physikalisch mögliche Zustandsabfolge eines einzelnen Teilchens! Für die galileivariante Schrödingergleichung läßt sich in analoger Weise durch

$$\bar{\Psi}_{\underline{b}_{(0)}\gamma} := \widehat{f(\gamma)}(\Psi_{\underline{b}_{(0)}}),\ \forall \gamma \in \Gamma$$

das entsprechende Beispiel konstruieren.

Um solche unphysikalischen Lösungen der basischen bzw. galileivarianten Schrödingergleichungen auszuschließen, beschränken wir uns auf sogenannte *physikalische* Schnitte bzw. Lösungen.

Definition 3.4 (Physikalische Schnitte) Sei $\underline{b}_{(0)}$ ein inertialer Rahmen.

(1) Ein Schnitt $\tilde{\Psi} : Gal(M) \to \mathbb{E}$ heißt *galileivariant*, falls es zu jedem $\gamma \in \Gamma$ eine zugehörende Phasenfunktion φ_γ, vgl. Seite 36, gibt, sodaß gilt

$$\tilde{\Psi}_{\underline{b}_{(0)}\gamma} = e^{i\varphi_\gamma}\tilde{\Psi}_{\underline{b}_{(0)}}.$$

(2) Ein Schnitt $\bar{\Psi} : Gal(M) \to \mathbb{E}$ heißt *basisch*, falls es zu jedem $\gamma \in \Gamma$ ein $u \in U(1)$ gibt, sodaß gilt

$$\bar{\Psi}_{\underline{b}_{(0)}\gamma} = u\bar{\Psi}_{\underline{b}_{(0)}}.$$

Verwendet man eine basische Zusammenhangs-1-Form, so heißen die galileivarianten Schnitte *physikalische* Schnitte. Verwendet man eine galileivariante Zusammenhangs-1-Form, so heißen die basischen Schnitte *physikalische* Schnitte.

Aus der Definition folgt sofort, daß physikalische Schnitte, bis auf globale Phasen $u \in U(1)$ „pro Blatt $\underline{b}(M)$ von $Gal(M)$“ durch deren Einschränkung auf *ein* Blatt $\underline{b}_{(0)}(M)$ eindeutig bestimmt sind.

Satz 3.2 *Sei $\bar{\omega}$ eine basische und $\tilde{\omega}$ eine galileivariante Zusammenhangs-1-Form und $\bar{\mathbb{D}}$ bzw. $\tilde{\mathbb{D}}$ der entsprechende Schrödinger-Differentialoperator. Weiters sei $\underline{b}_{(0)}$ ein inertialer Rahmen. Es gilt*

(1) Physikalische Schnitte von $\mathbb{E}$ erfüllen das gewünschte Transformationsverhalten der Erwartungswerte zu verschiedenen inertialen Rahmen.

(2) Ist $\Psi_{\underline{b}_{(0)}} : M \to E$ eine auf eins normierte Lösung der Schrödingergleichung $D^{\omega}_{\underline{b}_{(0)}} \Psi_{\underline{b}_{(0)}} = 0$ mit $\omega := (\underline{b}_{(0)} \times id_{U(1)})^* \hat{\omega}$ und $\hat{\omega} \in \{\bar{\omega}, \tilde{\omega}\}$, so sind die physikalischen, auf eins normierten Schnitte $\tilde{\Psi}$ und $\bar{\Psi}$, definiert durch

$$\tilde{\Psi}_{\underline{b}_{(0)}\gamma} := e^{i\varphi_\gamma} \tilde{\Psi}_{\underline{b}_{(0)}}, \ \forall \gamma \in \Gamma \quad \text{und} \tag{3.10}$$

$$\bar{\Psi}_{\underline{b}_{(0)}\gamma} := \bar{\Psi}_{\underline{b}_{(0)}}, \ \forall \gamma \in \Gamma \tag{3.11}$$

(die φ_γ so gewählt, daß $\tilde{\Psi}$ beliebig oft differenzierbar), Lösungen der entsprechenden Schrödingergleichungen, also

$$\bar{\mathbb{D}}\tilde{\Psi} = 0 \quad \text{und} \tag{3.12}$$

$$\tilde{\mathbb{D}}\bar{\Psi} = 0. \tag{3.13}$$

(3) Umgekehrt sind alle physikalischen, auf eins normierten Lösungen der Schrödingergleichungen (3.12) bzw. (3.13) von der Form (3.10) bzw. (3.11). Die „Mächtigkeit“ der Lösungsmengen der Schrödingergleichungen auf M zu einem elektromagnetischen Feld F ist im Vergleich zu den physikalischen Lösungsmengen der entsprechenden Schrödingergleichungen auf $Gal(M)$ also „modulo globaler Phasen $u \in U(1)$ pro Blatt $\underline{b}(M)$ von $Gal(M)$“ dieselbe.

Beweis.

(1) Verwende Gleichungen (3.8) und (3.9), die Definition eines physikalischen Schnittes, die Charakterisierungen von basischen bzw. galileivarianten Zusammenhangs-1-Formen sowie die Ergebnisse aus dem Abschnitt „Orts- und Impulsoperatoren bzw. deren Erwartungswerte zu zwei inertialen Rahmen“ des zweiten Kapitels.

(2) Verwende Gleichung (3.5) und die Ergebnisse aus dem Abschnitt „Änderung des inertialen Rahmen“ des zweiten Kapitels.

(3) Klar nach Definition eines physikalischen Schnittes. □

ZUSAMMENFASSUNG:
Die basischen bzw. galileivarianten Schrödingergleichungen auf dem Galileibündel einer Galileischen Mannigfaltigkeit lösen das Problem der notwendigen Auswahl eines inertialen Rahmens, vgl. Definition der Schrödingergleichungen auf M, indem die kanonischen

Vektorfelder auf dem Galileibündel für die kovarianten Ableitungsrichtungen verwendet werden. Die Methode besteht, grob gesprochen, darin, die Schrödingergleichungen auf M zu den verschiedenen inertialen Rahmen auf einer größeren Mannigfaltigkeit in solcher Weise übereinanderzustapeln, daß man dabei die Zusammenhangs-1-Form nicht verändert (basisch) oder in zum Rahmenwechsel abgestimmter Weise verändert (galileivariant). Das Galileibündel, geblättert in zu M diffeomorphe Untermannigfaltigkeiten $\underline{b}(M)$, eignet sich in natürlicher Weise für diese Aufgabe. Die basischen bzw. galileivarianten Schrödingergleichungen lassen sich auf die Blätter $\underline{b}(M)$ einschränken, was einerseits die Verbindung zu den Schrödingergleichungen auf M herstellt, andererseits jedoch das Problem der Einschränkung auf physikalische Lösungen mit sich bringt. Die Vielfalt der physikalisch möglichen Zustände wird durch den Übergang von den Schrödingergleichungen auf M zu den Schrödingergleichungen auf $Gal(M)$ nicht verändert.

Kapitel 4

Die Theorie auf Bargmann-Mannigfaltigkeiten

Nach der Theorie der Schrödingergleichungen auf den Galileibündeln von Galileischen Mannigfaltigkeiten, stellt dieses Kapitel die zweite Untersuchung dar, eine Schrödingergleichung auf einer geeigneten Mannigfaltigkeit zu definieren, sodaß man ohne Wahl eines inertialen Beobachters auskommt, jedoch bei nachträglicher Wahl eines inertialen Beobachters, die übliche Theorie aus dem zweiten Kapitel erhält. Ein wesentlicher Unterschied zur Theorie auf $Gal(M)$ ist die Tatsache, daß nicht von einer Galileischen Mannigfaltigkeiten (M, θ, g, ∇), sondern von einer sogenannten Bargmann-Mannigfaltigkeit $(\mathbb{M}, p, M, \mathsf{g})$ zu (M, θ, g, ∇) ausgegangen wird. Im Vergleich zu $Gal(M)$ ist eine Bargmann-Mannigfaltigkeit jedoch nicht kanonisch zu (M, θ, g, ∇) gegeben, sie existiert aber immer. Weiters brauchen die Lösungsmengen der Schrödingergleichungen auf $\mathbb{M}$ nicht eingeschränkt zu werden, und schließlich ist ein Galileibündel 10-dimensional und eine Bargmann-Mannigfaltigkeit nur 5-dimensional. Die Ausarbeitung stützt sich auf die Arbeiten [Duv.et.al.], [Duv], [Tul1] und [Tul2], enthält aber auch eigene Erweiterungen.

4.1 Die induzierte Galileische Mannigfaltigkeit

Definition 4.1 (Bargmann-Mannigfaltigkeit) Ein Quadrupel $(\mathbb{M}, p, M, \mathsf{g})$ heißt *Bargmann-Mannigfaltigkeit*, wenn es folgende Bedingungen erfüllt:

(1) $(\mathbb{M}, p, M)$ ist ein $(\mathbb{R}, +)$-Prinzipalfaserbündel.

(2) M ist eine wegzusammenhängende, einfach zusammenhängende, parakompakte, 4-dimensionale Mannigfaltigkeit, deren zweite de-Rahmsche Kohomologiegruppe trivial ist ($H^2_{dR}(M) = 0$).

(3) g ist eine Metrik auf $\mathbb{M}$ mit Signatur $(+,+,+,+,-)$. Der zu g gehörende Levi-Civita-Zusammenhang $\bar{\nabla}$ ist krümmungsfrei.

(4) Es gelten die Verträglichkeitseigenschaften

$$\begin{aligned} \mathsf{g}(\xi,\xi) &= 0 \text{ und} \\ \bar{\nabla}\xi &= 0, \end{aligned}$$

wobei $\xi := 1^* \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$ das zu $1 \in Lie(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ gehörende fundamentale, vertikale Vektorfeld bezeichnet, vgl.[Kob1, p.51, p.63]. Eine *vollständige Bargmann-Mannigfaltigkeit* ist eine Bargmann-Mannigfaltigkeit $(\mathbb{M}, p, M, \mathsf{g})$, deren Levi-Civita-Zusammenhang $\bar{\nabla}$ vollständig ist.

TOPOLOGISCHE EIGENSCHAFTEN VON $\mathbb{M}$:
Nach [Dieu3, p.5,80f,90] sind alle Prinzipalfaserbündel (P, p, M), deren Strukturgruppen G diffeomorph zu einem $\mathbb{R}^n$ sind, trivialisierbar, d.h. es gibt einen Prinzipalfaserisomorphismus $\Phi : P \to M \times G$. Für Bargmann-Mannigfaltigkeiten trifft die Definition eines Prinzipalfaserbündels in [Dieu3] zu. Es gibt also eine Trivialisierung

$$\Phi : \mathbb{M} \to M \times \mathbb{R}.$$

Da M wegzusammenhängend ist, folgt ([Jän, p.22]), daß $M \times \mathbb{R}$ wegzusammenhängend ist, und mittels der Trivialisierung, daß $\mathbb{M}$ es ist. Weiters erhält man, daß $\mathbb{M}$, wie M, einfach zusammenhängend ist, weil eine Homotopiegruppe eines kartesischen Produktes isomorph zum Produkt der Homotopiegruppen der Faktoren ist, vgl. [Mar1, p.84]. $\mathbb{M}$ ist ferner parakompakt, weil $\mathbb{M}$ eine pseudo-Riemannsche Metrik g trägt, vgl. [Mar2]. Schließlich sind die erste und zweite de-Rahmsche Kohomologiegruppe von $\mathbb{M}$ trivial, weil es die von M sind und $\mathbb{M}$ sich zu $M \times \mathbb{R}$ trivialisieren läßt, vgl. [Gui, p.181].
Die 5-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathbb{M}$ hat also dieselben topologischen Eigenschaften wie die Basismannigfaltigkeit M.

Es folgen nun einige Sätze, die dazu führen, daß jede (vollständige) Bargmann-Mannigfaltigkeit $(\mathbb{M}, p, M, \mathsf{g})$ auf natürliche Weise eine (vollständige) Galileische Mannigfaltigkeit (M, θ, g, ∇) induziert.

Zuvor noch ein wichtiges

Lemma 4.1 *Sei* $(\mathbb{M}, p, M, \mathsf{g})$ *eine Bargmann-Mannigfaltigkeit. Aus der Parallelität von* ξ *folgt, daß* ξ *eine infinitesimale Isometrie von* g *ist, bzw., daß die Rechtsoperationen* $\delta_r : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$, $r \in \mathbb{R}$ *des* $(\mathbb{R}, +)$*-Prinzipalfaserbündels* $(\mathbb{M}, p, M)$ *Isometrien von* g *sind:*

$$\bar{\nabla}\xi = 0 \Rightarrow L_\xi \mathsf{g} = 0 \Leftrightarrow \delta_r^* \mathsf{g} = \mathsf{g}, \ \forall r \in \mathbb{R},$$

wobei L_ξ *die Lieableitung von* g *nach* ξ *bezeichnet.*

Beweis.
Seien $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$ zwei Vektorfelder auf $\mathbb{M}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\xi(\mathsf{g}(X,Y)) &= \bar{\nabla}_\xi(\mathsf{g}(X,Y)) \\
&= (\bar{\nabla}_\xi \mathsf{g})(X,Y) + \mathsf{g}(\bar{\nabla}_\xi X, Y) + \mathsf{g}(X, \bar{\nabla}_\xi Y) \\
&= \mathsf{g}(\bar{\nabla}_X \xi + [\xi, X], Y) + \mathsf{g}(X, \bar{\nabla}_Y \xi + [\xi, Y]) \\
&= \mathsf{g}(L_\xi X, Y) + \mathsf{g}(X, L_\xi Y),
\end{aligned}$$

wobei unter anderem die Torsionsfreiheit des Levi-Civita-Zusammenhangs $\bar{\nabla}$ verwendet wurde, auf Grund derer $\bar{\nabla}_X Y = \bar{\nabla}_Y X + [X,Y]$ gilt. $[.,.]$ bezeichnet die Lieklammer von Vektorfeldern. Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
\xi(\mathsf{g}(X,Y)) &= L_\xi(\mathsf{g}(X,Y)) \\
&= (L_\xi \mathsf{g})(X,Y) + \mathsf{g}(L_\xi X, Y) + \mathsf{g}(X, L_\xi Y).
\end{aligned}$$

Es folgt $L_\xi \mathsf{g} = 0$, was nach [Kob1, p.33] äquivalent zu $\delta_r^* \mathsf{g} = \mathsf{g}$, $\forall r \in \mathbb{R}$ ist. $\square$

Satz 4.1 (kanonische Zeit-1-Form θ auf M) *Sei $(\mathbb{M}, p, M, \mathsf{g})$ eine Bargmann-Mannigfaltigkeit. Auf M läßt sich auf natürliche Weise eine nirgends verschwindende, geschlossene 1-Form θ definieren, für die gilt, daß $p^*\theta = \mathsf{g}(\xi, .)$.*

Beweis.
Die 1-Form $\mathsf{g}(\xi, .)$ auf $\mathbb{M}$ ist horizontal bzgl. der Faserung $\mathbb{M} \xrightarrow{p} M$, denn $\mathsf{g}(\xi, \xi) = 0$, und sie ist rechtsinvariant bzgl. der Rechtsoperation der Strukturgruppe $(\mathbb{R}, +)$ von $(\mathbb{M}, p, M)$. Sei nämlich $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$ und $r \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\delta_r^*(\mathsf{g}(\xi, .))(X) &= \mathsf{g}(\xi, \delta_{r*} X) \circ \delta_r \\
&= \mathsf{g}(\delta_{r*}\xi, \delta_{r*} X) \circ \delta_r \\
&= (\delta_r^* \mathsf{g})(\xi, X) \\
&= \mathsf{g}(\xi, .)(X),
\end{aligned}$$

wobei $f_* X$ den „pushforward“ eines Vektorfeldes X mittels eines Diffeomorphismus f bezeichnet, vgl. [Kob1, p.10], [Ish, p.30] und [Kol, p.19]. Nach [Gre2, p.240f], vgl. auch Seite 26, gibt es genau eine 1-Form θ auf der Basismannigfaltigkeit M von $(\mathbb{M}, p, M)$, für die $p^*\theta = \mathsf{g}(\xi, .)$ gilt. θ verschwindet nirgends, weil $\mathsf{g}(\xi, .)$ nirgends verschwindet. Es bleibt die Geschlossenheit von θ zu zeigen, was sich aber auf die Geschlossenheit von $\mathsf{g}(\xi, .)$ reduziert, denn

$$\begin{aligned}
d\theta = 0 &\Leftrightarrow p^* d\theta = 0 \; (p^* \text{ ist injektiv}) \\
&\Leftrightarrow d(p^*\theta) = 0 \\
&\Leftrightarrow d(\mathsf{g}(\xi, .)) = 0.
\end{aligned}$$

Wir verwenden dazu folgende Formel für die äußere Ableitung einer 1-Form ω:
$(d\omega)(X,Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y])$.

$$\begin{aligned}(d(\mathsf{g}(\xi,.)))(X,Y) &= X\mathsf{g}(\xi,Y) - Y\mathsf{g}(\xi,X) - \mathsf{g}(\xi,[X,Y]) \\ &= \mathsf{g}(\xi,\bar{\nabla}_X Y) - \mathsf{g}(\xi,\bar{\nabla}_Y X) - \mathsf{g}(\xi,[X,Y]) \\ &= \mathsf{g}(\xi,\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X - [X,Y]) \\ &= 0,\end{aligned}$$

auf Grund der Torsionsfreiheit des Levi-Civita-Zusammenhangs $\bar{\nabla}$. □

Rechnen mit θ:
Sei $v \in T_x(M),\ x \in M$ ein Tangentialvektor an M in x und $v^\uparrow \in T_y(\mathbb{M}),\ y \in \mathbb{M},\ p(y) = x$ ein Lift von v bzgl. der Faserung $\mathbb{M} \xrightarrow{p} M$, also $T_y p(v^\uparrow) = v$. Dann läßt sich $\theta(v)$ berechnen durch

$$\boxed{\theta(v) = g(\xi(y), v^\uparrow).} \tag{4.1}$$

Denn $g(\xi(y), v^\uparrow) = \mathsf{g}(\xi,.)(v^\uparrow) = p^*\theta(v^\uparrow) = \theta(v)$.

Satz 4.2 (kanonische Fasermetrik g auf $R(M)$) *Sei $(\mathbb{M}, p, M, \mathsf{g})$ eine Bargmann-Mannigfaltigkeit. Auf dem Untervektorbündel $R(M) := ker(\theta) \subseteq T(M)$ der raumartigen Tangentialvektoren bzgl. θ läßt sich auf natürliche Weise eine positiv definite Fasermetrik g definieren.*

Beweis.
Seien $v, w \in R_x(M),\ x \in M$ und $v^\uparrow, w^\uparrow \in T_y(\mathbb{M}),\ y \in \mathbb{M},\ p(y) = x$ deren Lifts, also $\theta(v) = \theta(w) = 0$, $T_y p(v^\uparrow) = v$, $T_y p(w^\uparrow) = w$ und $g(\xi(y), v^\uparrow) = g(\xi(y), w^\uparrow) = 0$. Definiere

$$\boxed{g(v,w) := \mathsf{g}(v^\uparrow, w^\uparrow).} \tag{4.2}$$

Wir zeigen, daß (4.2) wohldefiniert ist:
Verwendet man andere Lifts auf dasselbe $y \in p^{-1}(x)$, so lassen sich diese durch Vielfache von $\xi(y)$ als $v^\uparrow + \lambda\xi(y),\ \lambda \in \mathbb{R}$ und $w^\uparrow + \mu\xi(y),\ \mu \in \mathbb{R}$ schreiben. Man erhält

$$\begin{aligned}\mathsf{g}(v^\uparrow + \lambda\xi(y), w^\uparrow + \mu\xi(y)) &= \mathsf{g}(v^\uparrow, w^\uparrow) + \lambda\mathsf{g}(\xi(y), w^\uparrow) + \mu\mathsf{g}(\xi(y), v^\uparrow) + \lambda\mu\mathsf{g}(\xi(y), \xi(y)) \\ &= \mathsf{g}(v^\uparrow, w^\uparrow).\end{aligned}$$

Verwendet man Lifts auf ein anderes $\bar{y} = \delta_r(y) \in p^{-1}(x), r \in \mathbb{R}$, so folgt aus der Rechtsinvarinz der Metrik $\delta_r^*\mathsf{g} = \mathsf{g}$ und der Tatsache, daß $T_y\delta_r(v^\uparrow)$ wieder ein Lift ist, die Wohldefiniertheit.

Bleibt zu zeigen, daß das so definierte g positiv definit ist:
Sei $\underline{\mathsf{b}} = (\mathsf{b}_1, \mathsf{b}_2, \mathsf{b}_3, \mathsf{b}_4, \mathsf{b}_5)$ eine Orthonormalbasis zu g in $T_y(\mathbb{M}),\ y \in \mathbb{M}$, also

$$\mathsf{g}(\underline{\mathsf{b}}^t, \underline{\mathsf{b}}) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_4 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -1 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $\xi(y)$ läst sich schreiben als Linearkombination

$$\xi(y) = \underline{\mathsf{b}}\,\xi_0,\ \xi_0 \in \mathbb{R}^5 \text{ (Spaltenraum)},\ \xi_0 = (c^1, ..., c^5)^t.$$

Es gibt nun eine orthogonale 4×4-Matrix R, sodaß sich in der neuen Orthonormalbasis $\underline{\mathsf{b}}' = (\mathsf{b}'_1, \mathsf{b}'_2, \mathsf{b}'_3, \mathsf{b}'_4, \mathsf{b}'_5) := \underline{\mathsf{b}} \begin{pmatrix} R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$ der Vektor $\xi(y)$ darstellen läßt als

$$\xi(y) = \underline{\mathsf{b}}'(0, 0, 0, a, \pm a)^t,\ 0 \neq a \in \mathbb{R}.$$

Das Quintupel

$$(\mathsf{b}'_1, \mathsf{b}'_2, \mathsf{b}'_3, a(\mathsf{b}'_4 \pm \mathsf{b}'_5) = \xi(y), \frac{1}{2a}(\mathsf{b}'_4 \mp \mathsf{b}'_5) =: \zeta)$$

ist eine Basis von $T_y(\mathbb{M})$. Die Vektoren $v_i := T_y p(\mathsf{b}'_i) \in T_{p(y)}(M),\ i = 1, 2, 3$ sind raumartig, und $v_0 := T_y p(\zeta)$ ist zeitartig und auf eins normiert bzgl. θ, denn es gilt

$$\begin{aligned} \mathsf{g}(\mathsf{b}'_i, \xi(y)) &= a\,\mathsf{g}(\mathsf{b}'_i, \mathsf{b}'_4 \pm \mathsf{b}'_5) = 0,\ \forall i = 1, 2, 3 \\ \mathsf{g}(\xi(y), \zeta) &= \frac{1}{2}\mathsf{g}(\mathsf{b}'_4 \pm \mathsf{b}'_5, \mathsf{b}'_4 \mp \mathsf{b}'_5) \\ &= \frac{1}{2}(1 - (-1)) = 1. \end{aligned}$$

Weiters sind die $v_i,\ i = 1, 2, 3$ orthonormal bzgl. g:

$$g(v_i, v_j) = \mathsf{g}(\mathsf{b}'_i, \mathsf{b}'_j) = \delta_{i,j},\ \forall i, j = 1, 2, 3. \tag{4.3}$$

Das Quadrupel $\underline{v} := (v_0, v_1, v_2, v_3)$ bildet eine Basis von $T_{p(y)}(M)$, da p surjektiv und $T_y p(a(\mathsf{b}'_4 \pm \mathsf{b}'_5)) = T_y p(\xi(y)) = 0$ gilt. Gleichung (4.3) zeigt also, daß g in $R_{p(y)}(M)$ positiv definit ist. Nachdem $y \in \mathbb{M}$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Satz 4.3 (kanonischer linearer Zusammenhang ∇ auf M) *Sei $(\mathbb{M}, p, M, \mathsf{g})$ eine Bargmann-Mannigfaltigkeit. Auf M läßt sich auf natürliche Weise ein krümmungs- und torsionsfreier linearer Zusammenhang ∇ definieren, der mit der kanonischen Zeit-1-Form θ und der kanonischen Fasermetrik g verträglich ist. Falls der Levi-Civita-Zusammenhang von g vollständig ist, dann ist auch ∇ vollständig.*

Beweis.
Der Beweis der einzelnen Behauptungen teilt sich in mehrere Abschnitte auf. Ausgangspunkt ist die Tatsache, daß der Levi-Civita-Zusammenhang $\bar{\nabla}$ einer Bargmann-Mannigfaltigkeit $(\mathbb{M}, p, M, \mathsf{g})$ krümmungsfrei, $\mathbb{M}$ einfach zusammenhängend und parakompakt ist. Die Voraussetzungen von [Kob1, Corollary 9.2., p.92] sind somit erfüllt. Das Rahmenbündel $L(\mathbb{M})$ von $\mathbb{M}$ ist daher isomorph zum trivialen Prinzipalfaserbündel $\mathbb{M} \times Gl_5(\mathbb{R})$, und $\bar{\nabla}$ ist isomorph zum kanonisch flachen Zusammenhang in $\mathbb{M} \times Gl_5(\mathbb{R})$. Es gibt also globale Parallelrahmen auf $\mathbb{M}$, und der Paralleltransport von $\bar{\nabla}$ ist wegunabhängig. Auf Grund der Verträglichkeit des Levi-Civita-Zusammenhangs $\bar{\nabla}$ mit g und der Parallelität von ξ, läßt sich $\bar{\nabla}$ auf das sogenannte Bargmannbündel $Barg(\mathbb{M}) \subset L(\mathbb{M})$ einschränken, das wir gleich definieren werden. Es gibt daher insbesondere Parallelrahmen $\underline{\mathsf{b}} : \mathbb{M} \to Barg(\mathbb{M})$ mit Werten in $Barg(\mathbb{M})$.

Definition und Satz 4.1 (Bargmannbündel, homogene Bargmanngruppe)
Sei $(\mathbb{M}, p, M, \mathsf{g})$ eine Bargmann-Mannigfaltigkeit. Das Unterbündel $Barg(\mathbb{M}) \stackrel{\pi_B}{\to} \mathbb{M}$ des Rahmenbündels $L(\mathbb{M})$ von $\mathbb{M}$, definiert durch

$$
\begin{aligned}
Barg(\mathbb{M}) &:= \bigcup_y Barg_y(\mathbb{M}),\ y \in \mathbb{M},\ \text{mit} \\
Barg_y(\mathbb{M}) &:= \{\underline{\mathsf{b}} \in L_y(\mathbb{M}) : \underline{\mathsf{b}} = (\xi(y), b_0, b_1, b_2, b_3),\ \mathsf{g}(\underline{\mathsf{b}}^t, \underline{\mathsf{b}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_3 \end{pmatrix}\},
\end{aligned}
$$

heißt *Bargmannbündel* und ist ein reduziertes Bündel von $L(\mathbb{M})$ mit der *homogenen Bargmanngruppe H*

$$
H := \{h \in Gl_5(\mathbb{R}) : h = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v^2}{2} & -v^t R \\ 0 & 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & v & R \end{pmatrix}, v \in \mathbb{R}^3(\text{Spaltenraum}), R \in O(3)\}
$$

als Strukturgruppe.

Beweis. Rechnung.

Wir berechnen als nächstes den Paralleltransport von $\bar{\nabla}$ entlang den Fasern von $\mathbb{M}$.

Lemma 4.2 *Seien y_1 und y_2 in derselben Faser von $\mathbb{M} \stackrel{p}{\to} M$, also $p(y_1) = p(y_2)$ und $r \in \mathbb{R}$ die eindeutig bestimmte reelle Zahl mit $y_2 = \delta_r(y_1)$. Dann gilt, daß der (wegunabhängige) Paralleltransport zu $\bar{\nabla}$ von Tangentialvektoren aus $T_{y_1}(\mathbb{M})$ nach $T_{y_2}(\mathbb{M})$ durch die Tangentialabbildung $T_{y_1}\delta_r$ der Rechtsoperation $\delta_r : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ an der Stelle y_1 gegeben ist.*

Beweis.
Wir verwenden eine Trivialisierung $\Phi : \mathbb{M} \to M \times \mathbb{R}$ und definieren auf $\mathbb{M}$ einen bzgl. der Rechtsoperation $\delta : \mathbb{M} \times \mathbb{R} \to \mathbb{M} : \delta(y, r) := \delta_r(y)$ invarianten Rahmen $\underline{\mathsf{b}} : \mathbb{M} \to L(\mathbb{M})$, indem wir einen Rahmen $\underline{b} : M \to L(M)$ von M mit $\Phi_*\xi$ zu einem Rahmen $(\Phi_*\xi, \underline{b} \circ pr_1)$ von $M \times \mathbb{R}$ ergänzen und mit Φ^{-1} zurücktransportieren.

$$\underline{\mathsf{b}} := T\Phi^{-1} \circ (\Phi_*\xi, \underline{b}) \circ \Phi = \Phi_*^{-1}(\Phi_*\xi, \underline{b}).$$

Dabei ist $pr_1 : M \times \mathbb{R} \to M$ die Projektion auf die erste Komponente. Weiters werden $\forall(x, r) \in M \times \mathbb{R}$ die Tangentialräume $T_{(x,r)}(M \times \mathbb{R})$ mit der direkten Summe $T_x(M) \oplus T_r(\mathbb{R})$ identifiziert, vgl. [Ish, p.21]. Sei $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$ ein Vektorfeld auf $\mathbb{M}$ und $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}^5$(Spaltenraum) die Komponentenfunktion von X bzgl. $\underline{\mathsf{b}}$, also $X = \underline{\mathsf{b}}f$. Das Vektorfeld ξ hat die konstante Komponentenfunktion $(1, \mathbf{0})^t$ bzgl. $\underline{\mathsf{b}}$. Aus der Parallelität von ξ und der Torsionsfreiheit von $\bar{\nabla}$ folgt

$$\bar{\nabla}_\xi X = [\xi, X] = \underline{\mathsf{b}}(\xi(f) - X((1, \mathbf{0})^t)) = \underline{\mathsf{b}}\,\xi(f).$$

Andererseits haben wir mit $A := \underline{\mathsf{b}}^*\bar{\omega}$, $\bar{\omega}$ die zu $\bar{\nabla}$ gehörende Zusammenhangs-1-Form auf $L(\mathbb{M})$,

$$\bar{\nabla}_\xi X = \bar{\nabla}_\xi(\underline{\mathsf{b}}f) = \underline{\mathsf{b}}(\xi(f) + A(\xi)f).$$

Es folgt $A(\xi)f = 0$, $\forall f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}^5 \Leftrightarrow A(\xi) = 0$. Seien nun y_1, y_2 und $r \in \mathbb{R}$ wie im Lemma, $v \in T_{y_1}(\mathbb{M})$, $v =: \underline{\mathsf{b}}(y_1)f_0$, $f_0 \in \mathbb{R}^5$ und $\gamma : [0, r] \to \mathbb{M} : \gamma(t) := \delta_t(y_1)$. Wir definieren einen Schnitt σ von $T(\mathbb{M})$ entlang γ durch

$$\sigma : [0, r] \to T(\mathbb{M}) : \sigma(t) := \underline{\mathsf{b}}(\gamma(t))f_0.$$

Der Schnitt σ ist parallel längs γ, denn

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}\sigma &= (\underline{\mathsf{b}} \circ \gamma)\ A(\dot{\gamma})f_0 \\ &= (\underline{\mathsf{b}} \circ \gamma)\ A(\xi \circ \gamma)f_0 = 0. \end{aligned}$$

Daher ist $\sigma(0) = v$ parallel zu

$$\sigma(r) = \underline{\mathsf{b}}(y_2)f_0 = T_{y_1}\delta_r(\underline{\mathsf{b}}(y_1)f_0) = T_{y_1}\delta_r(v). \quad \square$$

FOLGERUNGEN:
Die zu Beginn des Beweises von Satz 4.3 bereits angesprochenen parallelen Rahmen $\underline{\mathsf{b}} : \mathbb{M} \to Barg(\mathbb{M})$, $\bar{\nabla}\underline{\mathsf{b}} = 0$, die wir von nun an **Bargmannrahmen** nennen, haben die Eigenschaft, im folgenden Sinn rechtsinvariant zu sein

$$\boxed{\underline{\mathsf{b}} = \delta_r^{\uparrow} \circ \underline{\mathsf{b}} \circ \delta_r^{-1},\ \forall r \in \mathbb{R},} \tag{4.4}$$

mit der kanonisch gelifteten Rechtsoperation $\delta_r^\uparrow$ auf $Barg(\mathbb{M}) \subset L(\mathbb{M})$, für ein $r \in \mathbb{R}$ erklärt durch

$$\begin{array}{rcl} \delta_r^\uparrow : Barg(\mathbb{M}) & \to & Barg(\mathbb{M}) \\ \underline{\mathsf{b}}(y) & \mapsto & \delta_r^\uparrow(\underline{\mathsf{b}}(y)) := T_y\delta_r(\underline{\mathsf{b}}(y)). \end{array}$$

Auf Grund dieser Eigenschaft „projizieren“ Bargmannrahmen $\underline{\mathsf{b}}$ von $\mathbb{M}$ auf Rahmen $\underline{b} : M \to Gal(M)$ von M mit Werten im Galileibündel bzgl. den induzierten Strukturen θ und g:
Dazu führen wir eine Projektion p vom Bargmannbündel in das Galileibündel ein. Sei $y \in \mathbb{M}$, $p(y) =: x \in M$ und $\underline{\mathsf{b}}(y) = (\xi(y), b_0, b_1, b_2, b_3) \in Barg_y(\mathbb{M})$.

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{p} : Barg(\mathbb{M}) & \to & Gal(M) \\ \underline{\mathsf{b}}(y) & \mapsto & \mathsf{p}(\underline{\mathsf{b}}(y)) := T_y p(b_0, b_1, b_2, b_3) \in \pi^{-1}(x). \end{array}$$

Wir erhalten ein kommutatives Diagramm von Projektionen:

$$\begin{tikzcd} Barg(\mathbb{M}) \arrow[r, "\mathsf{p}"] \arrow[d, "\pi_B"'] & Gal(M) \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{M} \arrow[r, "p"] & M \end{tikzcd}$$

Aus $p \circ \delta_r = p$ folgt $Tp \circ T\delta_r = Tp$, und daher gilt $\mathsf{p} \circ \delta_r^\uparrow = \mathsf{p}$. Für einen Rahmen $\underline{\mathsf{b}} : \mathbb{M} \to Barg(\mathbb{M})$ mit der Rechtsinvarianzeigenschaft (4.4) ist daher der Rahmen $\underline{b}^\downarrow$

$$\begin{array}{rcl} \underline{b}^\downarrow : M & \to & Gal(M) \\ x & \mapsto & \underline{b}^\downarrow(x) := \mathsf{p}(\underline{\mathsf{b}}(y)),\ y \in p^{-1}(x). \end{array}$$

wohldefiniert. Wir nennen ihn den **projizierten Galileirahmen** zu $\underline{\mathsf{b}}$, und erhalten ein weiteres kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} Barg(\mathbb{M}) \arrow[r, "\mathsf{p}"] & Gal(M) \\ \mathbb{M} \arrow[r, "p"] \arrow[u, "\underline{\mathsf{b}}"] & M \arrow[u, "\underline{b}^\downarrow"'] \end{tikzcd}$$

Umgekehrt läßt sich jeder Rahmen $\underline{b} : M \to Gal(M)$ eindeutig zu einem Rahmen $\underline{\mathsf{b}}^\uparrow : \mathbb{M} \to Barg(\mathbb{M})$ liften, der die Rechtsinvarianzeigenschaft $\underline{\mathsf{b}}^\uparrow = \delta_r^\uparrow \circ \underline{\mathsf{b}}^\uparrow \circ \delta_r^{-1}$, $\forall r \in \mathbb{R}$ erfüllt, und dessen projizierter Galileirahmen $\underline{b}^\downarrow$ gleich $\underline{b}$ ist:
Sei $\underline{b} = (b_0, b_1, b_2, b_3) : M \to Gal(M)$ ein Rahmen. Zu jedem $x \in M$ und $y \in p^{-1}(x)$ gibt es genau ein $\mathsf{b}_0^\uparrow(y) \in T_y(\mathbb{M})$ mit den Eigenschaften

$$T_y p(\mathsf{b}_0^\uparrow(y)) = b_0(x) \ \text{ und } \ \mathsf{g}(\mathsf{b}_0^\uparrow(y), \mathsf{b}_0^\uparrow(y)) = 0.$$

Weiters lassen sich die $b_i(x)$, $i = 1,2,3$ eindeutig zu $\mathsf{b}_i^{\uparrow}(y) \in T_y(\mathbb{M})$ liften mit den bestimmenden Eigenschaften

$$T_y p(\mathsf{b}_i^{\uparrow}(y)) = b_i(x) \;\text{ und }\; \mathsf{g}(\mathsf{b}_0^{\uparrow}(y), \mathsf{b}_i^{\uparrow}(y)) = 0.$$

Zu $y_1, y_2 = \delta_r(y_1) \in p^{-1}(x)$ in derselben Faser von x gilt auf Grund der Rechtsinvarianz von g, daß

$$\mathsf{b}_\nu^{\uparrow}(y_2) = T_{y_1}\delta_r(\mathsf{b}_\nu^{\uparrow}(y_1)), \;\forall \nu = 0,1,2,3.$$

Somit ist der Rahmen

$$\begin{array}{rcl} \underline{\mathsf{b}}^{\uparrow} : \mathbb{M} & \rightarrow & Barg(\mathbb{M}) \\ y & \mapsto & \underline{\mathsf{b}}^{\uparrow}(y) := (\xi(y), \mathsf{b}_0^{\uparrow}(y), \mathsf{b}_1^{\uparrow}(y), \mathsf{b}_2^{\uparrow}(y), \mathsf{b}_3^{\uparrow}(y)) \end{array}$$

ein Lift von $\underline{b}$, der die Rechtsinvarianzeigenschaft erfüllt, und dessen projizierter Galileirahmen $\underline{b}^{\downarrow}$ gleich $\underline{b}$ ist.

Die Zuordnungen $\underline{\mathsf{b}} \to \underline{b}^{\downarrow}$ und $\underline{b} \to \underline{\mathsf{b}}^{\uparrow}$ sind also zueinander invers. Das folgende Lemma gibt Auskunft über das Transformationsverhalten des jeweils zugeordneten Rahmens bei Transformation des Ausgangsrahmens mittels einer Matrix aus der entsprechenden Strukturgruppe Γ bzw. H.

Lemma 4.3 *Seien $\underline{\mathsf{b}}_{(i)} : \mathbb{M} \to Barg(\mathbb{M})$, $i = 1,2$ Rahmen, die die Rechtsinvarianzeigenschaft (4.4) erfüllen, und seien $\underline{b}_{(i)} : M \to Gal(M)$, $i = 1,2$ Rahmen. Dann gilt*

$$\underline{b}_{(2)} = \underline{b}_{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & R \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \underline{\mathsf{b}}_{(2)}^{\uparrow} = \underline{\mathsf{b}}_{(1)}^{\uparrow} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v^2}{2} & -v^t R \\ 0 & 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & v & R \end{pmatrix} \;\textit{und}$$

$$\underline{b}_{(2)}^{\downarrow} = \underline{b}_{(1)}^{\downarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & R \end{pmatrix} \;\Leftarrow\; \underline{\mathsf{b}}_{(2)} = \underline{\mathsf{b}}_{(1)} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v^2}{2} & -v^t R \\ 0 & 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & v & R \end{pmatrix}.$$

Beweis. Rechnung.

Dieses Lemma garantiert die Wohldefiniertheit der folgenden

Definition 4.2 (kanonischer linearer Zusammenhang ∇ auf M)
Sei $(\mathbb{M}, p, M, \mathsf{g})$ eine Bargmann-Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Zusammenhang $\bar{\nabla}$, kanonischer Zeit-1-Form θ auf M, kanonischer Fasermetrik g auf $R(M)$ und dazugehörendem Galileibündel $Gal(M)$. Sei weiters $\underline{\mathsf{b}} : \mathbb{M} \to Barg(\mathbb{M})$, $\bar{\nabla}\underline{\mathsf{b}} = 0$ ein Bargmannrahmen und $\underline{b}^{\downarrow} : M \to Gal(M)$ der projizierte Galileirahmen zu $\underline{\mathsf{b}}$. Der durch die Forderung der Parallelität von $\underline{b}^{\downarrow}$

$$\boxed{\nabla\, \underline{b}^{\downarrow} = 0}$$

eindeutig bestimmte lineare Zusammenhang ∇ auf M heißt *kanonischer linearer Zusammenhang* zu $(\mathbb{M}, p, M, \mathsf{g})$ auf M.

Folgerung 4.1 *Es gelten*

(1) *Der kanonische lineare Zusammenhang* ∇ *auf* M *ist krümmungsfrei, weil parallele Rahmen existieren.*

(2) ∇ *ist verträglich mit der kanonischen Zeit-1-Form* θ *und der kanonischen Fasermetrik* g*, denn* ∇ *ist reduzibel auf das Galileibündel* $Gal(M)$ *von* (M, θ, g)*, vgl. Satz 1.3.*

(3) *Der kanonische lineare Zusammenhang zu einer vollständigen Bargmann-Mannigfaltigkeit* $(\mathbb{M}, p, M, \mathsf{g})$ *ist vollständig.*

Beweis von (3).
Sei $x_0 \in M$ und $v_0 \in T_{x_0}(M)$. Zu zeigen ist, daß es eine Geodäte $x : \mathbb{R} \to M$, mit Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ gibt. Sei $\underline{b}^{\downarrow}$ der projizierte Galileirahmen eines Bargmannrahmens $\underline{\mathsf{b}}$, $y_0 \in p^{-1}(x)$ und $v_0^{\uparrow} \in T_{y_0}(\mathbb{M})$ ein Lift von v_0 nach y_0, also $T_{y_0}p(v_0^{\uparrow}) = v_0$. Wir haben die Komponentendarstellungen $v_0 = \underline{b}^{\downarrow}(x_0)\zeta,\ \zeta \in \mathbb{R}^4$ und $v_0^{\uparrow} = \underline{\mathsf{b}}(y_0)\zeta^{\uparrow},\ \zeta^{\uparrow} \in \mathbb{R}^5$. Auf Grund der Vollständigkeit des Levi-Civita-Zusammenhangs $\bar{\nabla}$ gibt es eine Geodäte $y : \mathbb{R} \to \mathbb{M}$ mit $y(0) = y_0$ und $\dot{y}(0) = v_0^{\uparrow}$. Der Schnitt $\dot{y}$ von $T(\mathbb{M})$ entlang y läßt sich wegen der Parallelität des Bargmannrahmens $\underline{\mathsf{b}}$ schreiben als

$$\dot{y} = (\underline{\mathsf{b}} \circ y)\zeta^{\uparrow}.$$

Wir definieren nun $x := p \circ y$ und zeigen, daß x die gesuchte Geodäte ist. Offensichtlich gilt $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$. Weiters haben wir

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Tp \circ \dot{y} \\ &= Tp \circ ((\underline{\mathsf{b}} \circ y)\zeta^{\uparrow}) \\ &= (\underline{b}^{\downarrow} \circ x)\zeta. \end{aligned}$$

Nach Definition ist aber der projizierte Galileirahmen $\underline{b}^{\downarrow}$ eines Bargmannrahmens parallel bzgl. ∇, und daher ist x die gesuchte Geodäte. □

Alternative Definitionen:

(1) Der kanonische lineare Zusammenhang ∇ auf M läßt sich auch durch den Paralleltransport von Tangentialvektoren $v_0 \in T_{x_0}(M),\ x_0 \in M$ entlang einer Kurve $x : [0,1] \to M,\ x(0) = x_0$ in M definieren:
Sei $y : [0,1] \to \mathbb{M}$ ein Lift von x, d.h. $p \circ y = x$, und $v_0^{\uparrow} \in T_{y(0)}(\mathbb{M})$ ein Lift von v_0 nach $y(0)$, also $T_{y(0)}p(v_0^{\uparrow}) = v_0$. Definiere nun den Paralleltransport $Pt(v_0, x) \in T_{x(1)}(M)$ von v_0 entlang x durch

$$Pt(v_0, x) := T_{y(1)}p(\bar{P}t(v_0^{\uparrow}, y)),$$

wobei $\bar{P}t(v_0^\uparrow, y) \in T_{y(1)}(\mathbb{M})$ den Paralleltransport von $v_0^\uparrow$ entlang y bzgl. $\bar{\nabla}$ bezeichnet. Mit Hilfe eines Bargmannrahmens $\underline{\mathsf{b}}$ und seinem projizierten Galileirahmen $\underline{b}^\downarrow$ schreiben wir $v_0 = \underline{b}^\downarrow(x_0)\zeta,\ \zeta \in \mathbb{R}^4$ und $v_0^\uparrow = \underline{\mathsf{b}}(y(0))\zeta^\uparrow,\ \zeta^\uparrow \in \mathbb{R}^5$. Dann gilt wegen der Parallelität des Bargmannrahmens $\underline{\mathsf{b}}$, daß $\bar{P}t(v_0^\uparrow, y) = \underline{\mathsf{b}}(y(1))\zeta^\uparrow$, und daher $T_{y(1)}p(\bar{P}t(v_0^\uparrow, y)) = \underline{b}^\downarrow(x_1)\zeta$. Die angegebene Vorschrift für den Paralleltransport deckt sich also mit dem aus Definition 4.2 folgenden Paralleltransport, sodaß derselbe lineare Zusammenhang damit definiert wird.

(2) Man kann weiters auch über die Definition einer kovarianten Ableitung ∇ von Vektorfeldern auf M einen linearen Zusammenhang ∇ auf M angeben, vgl. [Duv.et.al.]:
Seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ zwei Vektorfelder auf M und $X^\uparrow, Y^\uparrow \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$ rechtsinvariante Lifts von X und Y, d.h. $T_y p(X^\uparrow(y)) = X(p(y)),\ \forall y \in \mathbb{M}$, analog für $Y^\uparrow$, und

$$[\xi, X^\uparrow] = [\xi, Y^\uparrow] = 0,$$

was nach [Kol, p.21] äquivalent ist zu

$$\delta_{r*}X^\uparrow = X^\uparrow \text{ und } \delta_{r*}Y^\uparrow = Y^\uparrow,\ \forall r \in \mathbb{R}.$$

Die kovariante Ableitung $\nabla_Y X$ von X nach Y wird definiert durch

$$(\nabla_Y X)(x) := T_y p((\bar{\nabla}_{Y^\uparrow} X^\uparrow)(y)),\ y \in p^{-1}(x),\ \forall x \in M. \tag{4.5}$$

Dies ist wohldefiniert, da $\bar{\nabla}_{Y^\uparrow} X^\uparrow$ wieder rechtsinvariant ist, also auf M projiziert. Mittels der Alternativ-Definitionen (1) erkennt man aber sofort, daß durch (4.5) wieder derselbe lineare Zusammenhang wie in Definition 4.2 bestimmt wird.

Folgerung 4.2 *Sei* $(\mathbb{M}, p, M, \mathsf{g})$ *eine Bargmann-Mannigfaltigkeit. Der kanonische lineare Zusammenhang* ∇ *auf* M *ist torsionsfrei.*

Beweis.
Dies folgt mit (4.5) und [Ish, p.30f] direkt aus der Torsionsfreiheit des Levi-Civita-Zusammenhangs $\bar{\nabla}$ von $(\mathbb{M}, p, M, \mathsf{g})$:

$$(\nabla_Y X - \nabla_X Y - [Y, X])(x) = T_y p((\bar{\nabla}_{Y^\uparrow} X^\uparrow - \bar{\nabla}_{X^\uparrow} Y^\uparrow - [Y^\uparrow, X^\uparrow])(y)) = 0. \quad \Box$$

Somit sind alle Behauptungen aus Satz 4.3 bewiesen. □

Resümee:
Jede (vollständige) Bargmann-Mannigfaltigkeit $(\mathbb{M}, p, M, \mathsf{g})$ induziert auf natürliche Weise eine (vollständige) Galileische Mannigfaltigkeit (M, θ, g, ∇).

4.2 Die Schrödingergleichungen auf $\mathbb{M}$

Wellenfunktion eines spinlosen Teilchens:

Sei $(\mathbb{M}, p, M, \mathsf{g})$ eine Bargmann-Mannigfaltigkeit. Aus Kapitel 2 kennen wir bereits das $U(1)$-Prinzipalfaserbündel $P := M \times U(1)$ über M und das dazu assoziierte hermitesche Vektorbündel $E = P \times_{U(1)} \mathbb{C}$ über M. Wir führen in analoger Weise[1] das $U(1)$-Prinzipalfaserbündel $\mathbb{P}$ über $\mathbb{M}$ und das dazu assoziierte hermitesche Vektorbündel $\mathbb{E}$ über $\mathbb{M}$ ein, vgl. Seite 43:

$$\mathbb{P} := \mathbb{M} \times U(1) \text{ und } \mathbb{E} := \mathbb{P} \times_{U(1)} \mathbb{C}.$$

Die hermitesche Fasermetrik $\langle ., . \rangle_B$ in $\mathbb{E}$ ist analog zu der in E erklärt durch

$$\langle [(y, u_1), z_1], [(y, u_2), z_2] \rangle_B := \overline{z_1 u_1} u_2 z_2.$$

Wir erhalten wiederum einige natürliche Projektionen

$$\begin{array}{rcl} pr : \mathbb{P} & \rightarrow & \mathbb{M} \\ (y, u) & \mapsto & pr(y, u) := y \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{pr} : \mathbb{E} & \rightarrow & \mathbb{M} \\ [(y, u), z] & \mapsto & \mathsf{pr}[(y, u), z] := y \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \bar{\pi} : \mathbb{P} & \rightarrow & P \\ (y, u) & \mapsto & \bar{\pi}(y, u) := (p(y), u) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\pi} : \mathbb{E} & \rightarrow & E \\ [(y, u), z] & \mapsto & \tilde{\pi}([(y, u), z]) := [(p(y), u), z] \end{array}$$

und damit verbundene kommutative Diagramme:

Prinzipalfaserbündelhomomorphismus zwischen $(\mathbb{P}, pr, \mathbb{M})$ und (P, π_P, M):

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P} \arrow[r, "\bar{\pi}"] \arrow[d, "pr"'] & P \arrow[d, "\pi_P"] \\ \mathbb{M} \arrow[r, "p"] & M \end{tikzcd}$$

[1]Da die Konstruktionen aus dem dritten Kapitel in diesem Kapitel nicht mehr verwendet werden, besteht kein Problem darin, dieselben Symbole für nunmehr andere Objekte zu verwenden.

Vektorbündelhomomorphismus zwischen $(\mathbb{E}, \mathsf{pr}, \mathbb{M})$ und (E, π_E, M):

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E} & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & E \\ {\scriptstyle \mathsf{pr}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi_E} \\ \mathbb{M} & \xrightarrow{p} & M \end{array}$$

Unter den Schnitten $\Psi : \mathbb{M} \to \mathbb{E}$ definieren wir nun eine wichtige Unterklasse von Schnitten, deren Werte entlang den Fasern von $\mathbb{M} \xrightarrow{p} M$ eine bestimmte Äquivarianzeigenschaft erfüllen. Dazu führen wir zuerst noch induzierte Rechtsoperationen $\tilde{\delta}_r$, $\forall r \in \mathbb{R}$ auf $\mathbb{E}$ ein:

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\delta}_r : \mathbb{E} & \to & \mathbb{E} \\ [(y,u),z] & \mapsto & \tilde{\delta}_r([(y,u),z]) := [(\delta_r(y),u),z]. \end{array}$$

Es folgt ein weiteres kommutatives Diagramm $\forall r \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E} & \xrightarrow{\tilde{\delta}_r} & \mathbb{E} \\ {\scriptstyle \mathsf{pr}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathsf{pr}} \\ \mathbb{M} & \xrightarrow{\delta_r} & \mathbb{M} \end{array}$$

Definition 4.3 (Bargmannschnitte der Masse m) Sei $(\mathbb{M}, p, M, \mathsf{g})$ eine Bargmann-Mannigfaltigkeit und $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$. Ein Schnitt $\Psi : \mathbb{M} \to \mathbb{E}$ heißt *Bargmannschnitt der Masse m*, falls für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt, daß

$$\boxed{\Psi \circ \delta_r = \exp(i\frac{m}{\hbar}r)\, \tilde{\delta}_r \circ \Psi.} \tag{4.6}$$

Integration auf instantanen Räumen:
Seien nun $\Psi, \Phi : \mathbb{M} \to \mathbb{E}$ zwei Bargmannschnitte derselben Masse m und $\Sigma \subset M$ ein instantaner Raum der induzierten Galileischen Mannigfaltigkeit (M, θ, g, ∇). Die komplexwertige Funktion

$$\begin{array}{rcl} \langle \Psi, \Phi \rangle_B : \mathbb{M} & \to & \mathbb{C} \\ y & \mapsto & \langle \Psi(y), \Phi(y) \rangle_B \end{array}$$

ist konstant entlang den Fasern von $\mathbb{M}$, d.h.

$$\delta_r^* \langle \Psi, \Phi \rangle_B = \langle \Psi, \Phi \rangle_B, \ \forall r \in \mathbb{R}.$$

Sie projiziert daher zu einer komplexwertigen Funktion $\langle \Psi, \Phi \rangle_M$ auf M :

$$\langle \Psi, \Phi \rangle_M(x) := \langle \Psi, \Phi \rangle_B(y), \ y \in p^{-1}(x).$$

Auf dem instantanen Raum Σ läßt sich mittels der kanonischen Dichte $|\mu_\Sigma|$ das (nicht notwendiger Weise endliche) Integral von $\langle\Psi,\Phi\rangle_M|_\Sigma$ erklären, vgl. Seite 20 :

$$\int_\Sigma \langle\Psi,\Phi\rangle_M|_\Sigma \;\; |\mu_\Sigma|\,.$$

Definition 4.4 (Wellenfunktion eines spinlosen Teilchens der Masse m) Sei $(\mathbb{M}, p, M, \mathsf{g})$ eine Bargmann-Mannigfaltigkeit und $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$. Ein Bargmannschnitt $\Psi : \mathbb{M} \to \mathbb{E}$ der Masse m heißt *Wellenfunktion eines spinlosen Teilchens der Masse m*, falls für alle instantanen Räume $\Sigma \subset M$ gilt, daß das Integral

$$\int_\Sigma \langle\Psi,\Psi\rangle_M|_\Sigma \;\; |\mu_\Sigma| \tag{4.7}$$

endlich ist. Ψ heißt weites *auf eins normiert*, falls (4.7) für alle instantanen Räume $\Sigma \subset M$ gleich eins ist.

Minimale Kopplung:

Wir betrachten nun ein spinloses Teilchen der Masse m und der elektrischen Ladung $q \in \mathbb{R}$, das unter der Einwirkung eines elektromagnetischen Feldes F steht.
Sei also F ein elektromagnetischer Feldstärketensor auf M und ω eine Zusammenhangs-1-Form auf P mit der Eigenschaft $\Omega = d\omega = i\frac{q}{\hbar}\pi_P^* F$. Mit dem Prinzipalfaserhomomorphismus $\bar\pi : \mathbb{P} \to P$ läßt sich auf $\mathbb{P}$ eine induzierte Zusammenhangs-1-Form $\hat\omega$ definieren, vgl. [Kob1, p.81f.]:

$$\hat\omega := \bar\pi^*\omega.$$

Die Krümmungs-2-form $\hat\Omega := d\hat\omega$ von $\hat\omega$ berechnet sich durch

$$\begin{aligned}\hat\Omega &= \bar\pi^*\Omega \\ &= i\frac{q}{\hbar}(\pi_P \circ \bar\pi)^* F.\end{aligned}$$

Weiters gilt, daß die so definierte Zusammenhangs-1-Form $\hat\omega$ basisch bezüglich der prinzipalen Faserung $\mathbb{R} \to \mathbb{P} \xrightarrow{\bar\pi} P$ ist, vgl. Seite 45. Umgekehrt gilt, daß jede basische Zusammenhangs-1-Form $\hat\omega$ auf $\mathbb{P}$, deren Krümmungs-2-Form

$$d\hat\omega = i\frac{q}{\hbar}(\pi_P \circ \bar\pi)^* F$$

erfüllt, von der Form $\hat\omega = \bar\pi^*\omega$ für eine Zusammenhangs-1-Form ω auf P mit $d\omega = i\frac{q}{\hbar}\pi_P^* F$ ist.

Wir erhalten also für jede elektromagnetische Feldstärke-2-Form F eine bestimmte Klasse von Zusammenhangs-1-Formen $\hat\omega$ auf $\mathbb{P}$, die wir **basische** Zusammenhangs-1-Formen zu F nennen.

Lemma 4.4 *Sei $\Psi : \mathbb{M} \to \mathbb{E}$ ein Schnitt und $\hat{\omega}$ eine basische Zusammenhangs-1-Form auf $\mathbb{P}$ mit kovarianter Ableitung $\hat{\nabla}$. Dann gilt*

$$\Psi \text{ ist ein Bargmannschnitt der Masse } m \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\nabla}_\xi \Psi = i\frac{m}{\hbar}\Psi.$$

Beweis.
Sei $\sigma_M : M \to P : \sigma_M(x) = (x, \sigma(x))$ ein Schnitt von P. Wir definieren einen Schnitt $\tau : \mathbb{M} \to \mathbb{P}$ durch

$$\tau(y) := (y, (\sigma \circ p)(y)) = (y, \sigma(p(y))), \ \forall y \in \mathbb{M},$$

der die Eigenschaft hat, auf den Fasern von $\mathbb{M}$ konstante Werte $\sigma(p(y))$ in der zweiten Komponente zuzuweisen. Das folgende Diagramm ist also wohldefiniert und kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M} & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{P} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\pi}} \\ M & \xrightarrow{\sigma_M} & P \end{array}$$

Der Schnitt Ψ läßt sich darstellen als

$$\Psi = [\tau, \Psi_\tau], \ \Psi_\tau : \mathbb{M} \to \mathbb{C}.$$

Zur basischen Zusammenhangs-1-Form $\hat{\omega}$ gehört genau eine Zusammenhangs-1-Form ω auf P, sodaß $\hat{\omega} = \bar{\pi}^*\omega$ gilt. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}_\xi \Psi &= [\tau, \xi(\Psi_\tau) + (\tau^*\hat{\omega})(\xi)\Psi_\tau] \\ &= [\tau, \xi(\Psi_\tau) + (\tau^*\bar{\pi}^*\omega)(\xi)\Psi_\tau] \\ &= [\tau, \xi(\Psi_\tau) + (p^*\sigma_M^*\omega)(\xi)\Psi_\tau] \\ &= [\tau, \xi(\Psi_\tau)], \end{aligned}$$

da ja $(p^*\sigma_M^*\omega)(\xi) = 0$. Schließlich folgt

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}_\xi \Psi = i\frac{m}{\hbar}\Psi \quad &\Leftrightarrow \quad \xi(\Psi_\tau) = i\frac{m}{\hbar}\Psi_\tau \\ &\Leftrightarrow \quad \delta_r^*\Psi_\tau = e^{i\frac{m}{\hbar}r}\Psi_\tau \\ &\Leftrightarrow \quad \Psi \text{ ist ein Bargmannschnitt der Masse } m. \quad \square \end{aligned}$$

Lemma 4.5 *Sei $\hat{\omega}$ eine basische Zusammenhangs-1-Form auf $\mathbb{P}$ mit kovarianter Ableitung $\hat{\nabla}$ und $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$ ein rechtsinvariantes Vektorfeld auf $\mathbb{M}$, d.h. $[\xi, X] = 0 \Leftrightarrow \delta_{r*}X = X, \ \forall r \in \mathbb{R}$, vgl. Seite 71 . Dann gilt*

$$\hat{\nabla}_X \hat{\nabla}_\xi = \hat{\nabla}_\xi \hat{\nabla}_X.$$

Beweis.
Wir verwenden den Schnitt $\tau : \mathbb{M} \to \mathbb{P}$ aus dem vorigen Beweis und schreiben für einen Schnitt $\Psi : \mathbb{M} \to \mathbb{E}$ wieder $\Psi = [\tau, \Psi_\tau]$, $\Psi_\tau : \mathbb{M} \to \mathbb{C}$. Zur basischen Zusammenhangs-1-Form $\hat{\omega}$ gehört genau eine Zusammenhangs-1-Form ω auf P, sodaß $\hat{\omega} = \bar{\pi}^*\omega$ gilt, und das rechtsinvariante X projiziert auf ein $X^\downarrow \in \mathfrak{X}(M)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\hat{\nabla}_X \hat{\nabla}_\xi \Psi &= \hat{\nabla}_X [\tau, \xi(\Psi_\tau)] \\
&= [\tau, X(\xi(\Psi_\tau)) + (p^*\sigma_M^*\omega)(X)\xi(\Psi_\tau)] \\
&= [\tau, \xi(X(\Psi_\tau)) + (\sigma_M^*\omega)(X^\downarrow) \circ p\, \xi(\Psi_\tau)] \\
&= [\tau, \xi(X(\Psi_\tau) + (\sigma_M^*\omega)(X^\downarrow) \circ p\, \Psi_\tau)] \\
&= \hat{\nabla}_\xi [\tau, X(\Psi_\tau) + (p^*\sigma_M^*\omega)(X)\Psi_\tau)] \\
&= \hat{\nabla}_\xi \hat{\nabla}_X \Psi. \quad \square
\end{aligned}$$

Die Schrödingergleichungen auf $\mathbb{M}$:

Definition 4.5 (Schrödinger-Bargmann-Differentialoperator) Sei $(\mathbb{M}, p, M, \mathsf{g})$ eine Bargmann-Mannigfaltigkeit mit zugehörigem Levi-Civita-Zusammenhang $\bar{\nabla}$, F ein elektromagnetischer Feldstärketensor auf M und $\hat{\omega}$ eine basische Zusammenhangs-1-Form zu F mit kovarianter Ableitung $\hat{\nabla}$. Sei weiters $\underline{\mathsf{b}} = (\mathsf{b}_1, \mathsf{b}_2, \mathsf{b}_3, \mathsf{b}_4, \mathsf{b}_5) : \mathbb{M} \to L(\mathbb{M})$ ein paralleler Orthonormalrahmen auf $\mathbb{M}$, also

$$\bar{\nabla}\underline{\mathsf{b}} = 0 \quad \text{und} \quad \mathsf{g}(\underline{\mathsf{b}}^t, \underline{\mathsf{b}}) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_4 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -1 \end{pmatrix} =: \eta =: (\eta^{\mu\nu})_{\mu,\nu=1,\dots 5}.$$

Der Operator

$$\boxed{\hat{\mathbb{D}} := \sum_{\nu=1}^5 \eta^{\nu\nu}\, \hat{\nabla}_{\mathsf{b}_\nu} \hat{\nabla}_{\mathsf{b}_\nu}}$$

heißt *Schrödinger-Bargmann-Differentialoperator* zu $\hat{\omega}$. Die zugehörige *Schrödingergleichung* für Bargmannschnitte $\Psi : \mathbb{M} \to \mathbb{E}$ der Masse m lautet

$$\boxed{\hat{\mathbb{D}}\Psi = 0.}$$

Satz 4.4 *Es gelten*

(1) *Der Schrödinger-Bargmann-Differentialoperator ist unabhängig vom gewählten parallelen Orthonormalrahmen.*

(2) *Sei* $\underline{b} : \mathbb{M} \to Gal(M)$ *ein inertialer Rahmen der induzierten Galileischen Mannigfaltigkeit* (M, θ, g, ∇) *und*

$$\underline{\mathsf{b}}^\uparrow = (\xi, \mathsf{b}_0^\uparrow, \mathsf{b}_1^\uparrow, \mathsf{b}_2^\uparrow, \mathsf{b}_3^\uparrow) : \mathbb{M} \to Barg(\mathbb{M})$$

der geliftete Bargmannrahmen. Dann läßt sich der Schrödinger-Bargmann-Differentialoperator $\hat{\mathbb{D}}$ schreiben als

$$\hat{\mathbb{D}} = 2\hat{\nabla}_{\mathsf{b}_0^\uparrow}\hat{\nabla}_\xi + \sum_{k=1}^{3} \hat{\nabla}_{\mathsf{b}_k^\uparrow}\hat{\nabla}_{\mathsf{b}_k^\uparrow}, \tag{4.8}$$

sodaß die Schrödingergleichung für Bargmannschnitte $\Psi : \mathbb{M} \to \mathbb{E}$ der Masse m

$$i\hbar\hat{\nabla}_{\mathsf{b}_0^\uparrow}\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{k=1}^{3} \hat{\nabla}_{\mathsf{b}_k^\uparrow}\hat{\nabla}_{\mathsf{b}_k^\uparrow}\Psi \tag{4.9}$$

lautet.

Beweis.
(1) Sei $\underline{\mathsf{b}}' = (\mathsf{b}_1', \mathsf{b}_2', \mathsf{b}_3', \mathsf{b}_4', \mathsf{b}_5') : \mathbb{M} \to L(\mathbb{M})$ ein weiterer paralleler Orthonormalrahmen auf $\mathbb{M}$. Dann gibt es eine Matrix $P \in O(4,1)$, d.h. $P^t\eta P = P\eta P^t = \eta$, sodaß $\underline{\mathsf{b}}' = \underline{\mathsf{b}}P$ gilt. Man erhält

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=1}^{5} \eta^{\nu\nu}\, \hat{\nabla}_{\mathsf{b}_\nu'}\hat{\nabla}_{\mathsf{b}_\nu'} &= \sum_{\nu,\rho,\sigma=1}^{5} P_\nu^\rho \eta^{\nu\nu}(P^t)_\sigma^\nu\, \hat{\nabla}_{\mathsf{b}_\rho}\hat{\nabla}_{\mathsf{b}_\sigma} \\
&= \sum_{\rho,\sigma=1}^{5} (P\eta P^t)_\sigma^\rho\, \hat{\nabla}_{\mathsf{b}_\rho}\hat{\nabla}_{\mathsf{b}_\sigma} \\
&= \sum_{\rho=1}^{5} \eta^{\rho\rho}\, \hat{\nabla}_{\mathsf{b}_\rho}\hat{\nabla}_{\mathsf{b}_\rho}. \quad \square
\end{aligned}$$

(2) Sei $\underline{b} : \mathbb{M} \to Gal(M)$ ein inertialer Rahmen der induzierten Galileischen Mannigfaltigkeit (M, θ, g, ∇) und $\underline{\mathsf{b}}^\uparrow = (\xi, \mathsf{b}_0^\uparrow, \mathsf{b}_1^\uparrow, \mathsf{b}_2^\uparrow, \mathsf{b}_3^\uparrow) : \mathbb{M} \to Barg(\mathbb{M})$ der geliftete Bargmannrahmen.
Wir definieren durch $\underline{\mathsf{b}} := (\mathsf{b}_1^\uparrow, \mathsf{b}_2^\uparrow, \mathsf{b}_3^\uparrow, \mathsf{b}_4, \mathsf{b}_5)$ mit

$$\begin{aligned}
\mathsf{b}_4 &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathsf{b}_0^\uparrow + \xi), \\
\mathsf{b}_5 &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathsf{b}_0^\uparrow - \xi)
\end{aligned}$$

einen parallelen Orthonormalrahmen auf $\mathbb{M}$, mit dem wir den Schrödinger-Bargmann-Differentialoperator darstellen können.

$$\hat{\mathbb{D}} = \frac{1}{2}(\hat{\nabla}_{\mathsf{b}_0^\uparrow+\xi}\hat{\nabla}_{\mathsf{b}_0^\uparrow+\xi} - \hat{\nabla}_{\mathsf{b}_0^\uparrow-\xi}\hat{\nabla}_{\mathsf{b}_0^\uparrow-\xi}) + \sum_{k=1}^{3} \hat{\nabla}_{\mathsf{b}_k^\uparrow}\hat{\nabla}_{\mathsf{b}_k^\uparrow}$$

$$
\begin{aligned}
&= \hat{\nabla}_{\mathsf{b}_0^\uparrow}\hat{\nabla}_\xi + \hat{\nabla}_\xi\hat{\nabla}_{\mathsf{b}_0^\uparrow} + \sum_{k=1}^{3} \hat{\nabla}_{\mathsf{b}_k^\uparrow}\hat{\nabla}_{\mathsf{b}_k^\uparrow} \\
&= 2\hat{\nabla}_{\mathsf{b}_0^\uparrow}\hat{\nabla}_\xi + \sum_{k=1}^{3} \hat{\nabla}_{\mathsf{b}_k^\uparrow}\hat{\nabla}_{\mathsf{b}_k^\uparrow},
\end{aligned}
$$

nach Lemma 4.5 und der Tatsache, daß $\mathsf{b}_0^\uparrow$ rechtsinvariant ist. Gleichung (4.9) folgt aus Lemma 4.4. □

Verbindung zu den Schrödingergleichungen auf M:

Ähnlich zur Vorgangsweise im Kapitel 3 wird in diesem Abschnitt durch Einschränkung eines Bargmannschnittes, der Lösung der Schrödingergleichung ist, auf eine geeignete, zu M diffeomorphe Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{M}$ ein Schnitt von $E \overset{\pi_E}{\to} M$ induziert, der die Schrödingergleichung auf M zu einem bestimmten inertialen Beobachter löst. In Kapitel 3 erfüllten die zu M diffeomorphen Blätter $\underline{b}(M) \subset Gal(M)$, $\underline{b}$ inertialer Rahmen, die dort analog gestellte Aufgabe. Das erste Ziel dieses Abschnittes ist es, zu jedem inertialen Rahmen $\underline{b}$ der induzierten Galileischen Mannigfaltigkeit (M, θ, g, ∇) einer Bargmann-Mannigfaltigkeit $(\mathbb{M}, p, M, \mathsf{g})$ ähnlich geeignete, zu M diffeomorphe Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{M}$ zu finden.

Definition und Satz 4.2 (inertiale Zusammenhangs-1-Formen)
Sei $(\mathbb{M}, p, M, \mathsf{g})$ eine Bargmann-Mannigfaltigkeit, (M, θ, g, ∇) die induzierte Galileische Mannigfaltigkeit, $\underline{b} : M \to Gal(M)$ ein inertialer Rahmen derselben und

$$\underline{\mathsf{b}}^\uparrow = (\xi, \mathsf{b}_0^\uparrow, \mathsf{b}_1^\uparrow, \mathsf{b}_2^\uparrow, \mathsf{b}_3^\uparrow) : \mathbb{M} \to Barg(\mathbb{M})$$

der geliftete Bargmannrahmen. Die 1-Form

$$\beta := \mathsf{g}(\mathsf{b}_0^\uparrow, .)$$

auf $\mathbb{M}$ heißt *inertiale Zusammenhangs-1-Form* des $\mathbb{R}$-Prinzipalfaserbündels $(\mathbb{M}, p, M)$ zum inertialen Rahmen $\underline{b}$. Sie definiert einen krümmungsfreien Zusammenhang auf $(\mathbb{M}, p, M)$ und daher auch eine Blätterung in zu M diffeomorphe Integralmannigfaltigkeiten $I(\beta) \subset \mathbb{M}$. Die Vektorfelder $\mathsf{b}_\nu^\uparrow$, $\nu = 0, ..., 3$ sind tangential an die Integralmannigfaltigkeiten $I(\beta)$.

Beweis.
Die Liealgebra von $(\mathbb{R}, +)$ ist $\mathbb{R}$, die 1-Form β nimmt also die richtigen Werte für eine Zusammenhangs-1-Form des $\mathbb{R}$-Prinzipalfaserbündels $(\mathbb{M}, p, M)$ an. Nach [Kob1, p.64] genügt es zu zeigen, daß

(1) $\beta(A^*) = A$, $\forall A \in Lie(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ mit A^* das zu A gehörende fundamentale, vertikale Vektorfeld auf $\mathbb{M}$, vgl.[Kob1, p.51, p.63],

(2) $\delta_r^*\beta = \beta$, $\forall r \in \mathbb{R}$ mit $\delta_r : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ Rechtsoperation der Strukturgruppe $\mathbb{R}$ auf M,

damit β eine Zusammenhangs-1-Form auf $\mathbb{M}$ ist. Jedes fundamentale, vertikale Vektorfeld A^* auf $\mathbb{M}$ zu $A \in Lie(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ ist aber, auf Grund der Eindimensionalität von $Lie(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, ein Vielfaches $A^* = A\xi$ von $\xi = 1^*$. Daher gilt

$$\beta(A^*) = \mathsf{g}(\mathsf{b}_0^\uparrow, A^*) = A\,\mathsf{g}(\mathsf{b}_0^\uparrow, \xi) = A.$$

Wegen der Rechtsinvarianz von g und $\mathsf{b}_0^\uparrow$ ist auch $\beta = \mathsf{g}(\mathsf{b}_0^\uparrow, .)$ rechtsinvariant, vgl. Rechnung zur Rechtsinvarianz von $\mathsf{g}(\xi, .)$ Seite 63. Somit sind (1) und (2) erfüllt. Die Krümmungsfreiheit $d\beta = d(\mathsf{g}(\mathsf{b}_0^\uparrow, .)) = 0$ folgt aus der Parallelität von g und $\mathsf{b}_0^\uparrow$ bzgl. dem Levi-Civita-Zusammenhang von $\mathbb{M}$, vgl. Rechnung zur Geschlossenheit von $\mathsf{g}(\xi, .)$ Seite 64. Auf Grund der Parakompaktheit und des einfachen Zusammenhangs von M kann man [Kob1, Corollary 9.2., p.92] verwenden, sodaß $\mathbb{M}$ mit dem zu β gehörenden Zusammenhang isomorph zu $M \times \mathbb{R}$ mit dem kanonisch flachen Zusammenhang ist. Die Bilder von $M \times \{r\}$, $r \in \mathbb{R}$ unter diesem Isomorphismus sind die Integralmannigfaltigkeiten $I(\beta) \subset \mathbb{M}$ von β. Die Vektorfelder $\mathsf{b}_\nu^\uparrow$, $\nu = 0, ..., 3$ sind tangential an die Integralmannigfaltigkeiten $I(\beta)$, da für den geliften Bargmannrahmen gilt, daß

$$\beta(\mathsf{b}_\nu^\uparrow) = \mathsf{g}(\mathsf{b}_0^\uparrow, \mathsf{b}_\nu^\uparrow) = 0, \forall \nu = 0, ..., 3. \quad \square$$

Beachte , daß die inertiale Zusammenhangs-1-Form β zu einem inertialen Rahmen $\underline{b} = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ nur vom parallelen Geschwindigkeitsvektorfeld b_0 aus $\underline{b}$ abhängt, vgl. die Bemerkung auf Seite 34.
Der nächste Satz zeigt, wie sich die zugehörigen Integralmannigfaltigkeiten bei einem Wechsel des inertialen Rahmens ändern.

Satz 4.5 *Sei $(\mathbb{M}, p, M, \mathsf{g})$ eine Bargmann-Mannigfaltigkeit, (M, θ, g, ∇) die induzierte Galileische Mannigfaltigkeit, $\underline{b}$, $\underline{b}' : M \to Gal(M)$ zwei inertiale Rahmen mit inertialen Zusammenhangs-1-Formen β, β' und $I(\beta), I(\beta')$ Integralmannigfaltigkeiten von β bzw. β'. Die beiden inertialen Rahmen sind durch eine Matrix $\gamma \in \Gamma$ verknüpft:*

$$\underline{b}' = \underline{b}\gamma,\ \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & R \end{pmatrix},\ v = (v^1, v^2, v^3)^t \in \mathbb{R}^3,\ R \in O(3).$$

Weiters seien für $\mu = 0, 1, 2, 3$ $x^\mu : M \to \mathbb{R}$ die bis auf eine additive Konstante bestimmten Funktionen auf M, die $dx^\mu = B^\mu$, $\forall \mu = 0, 1, 2, 3$ erfüllen, wobei $(B^\mu)_{\mu=0,1,2,3}$ der duale Rahmen zu $\underline{b}$ ist.
Dann gibt es eine reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$, sodaß sich $I(\beta)$ bijektiv durch die Funktion f auf $I(\beta')$ abbilden läßt:

$$\begin{aligned} f : I_\beta &\to I(\beta') \\ y &\mapsto f(y) := \delta_{g(p(y))}(y), \quad \textit{mit} \\ g : M &\to \mathbb{R} : g := \frac{v^2}{2}x^0 - \sum_{k=1}^{3} v^k x^k + c. \end{aligned}$$

Beweis.
Eine Abbildung f, die die Integralmannigfaltigkeiten von zwei Zusammenhangs-1-Formen β, β' ineinander abbildet, muß von der Form $f(y) = \delta_{g(p(y))}(y)$ sein, d.h. durch faserabhängige Rechtsoperationen ausdrückbar sein. Weil Trivialisierungen mit den Rechtsoperationen vertauschen, kann man die „Abstandsfunktion“ g auch zwischen den Bildern der Integralmannigfaltigkeiten bzgl. einer Trivialisierung berechnen. Sei also $\Phi : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{M}$ eine Trivialisierung bzgl. β, d.h. $\Phi^*\beta = dpr_2$ mit $pr_2 : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Projektion auf die zweite Komponente. Nach Lemma 4.3 läßt sich β' mittels des gelifteten Bargmannrahmens von $\underline{b}$ berechnen als

$$\begin{aligned} \beta' &= \mathsf{g}(\mathsf{b}_0'^{\uparrow}, .) \\ &= \mathsf{g}(\mathsf{b}_0^{\uparrow}, .) + \sum_{k=1}^{3} v^k \mathsf{g}(\mathsf{b}_k^{\uparrow}, .) - \frac{v^2}{2}\mathsf{g}(\xi, .) \\ &= \beta + \sum_{k=1}^{3} v^k p^* B^k - \frac{v^2}{2} p^* B^0. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit gilt, da sich die mit der Metrik g zu 1-Formen „gezogenen“ Vektorfelder $\mathsf{b}_k^{\uparrow},\ k = 1, 2, 3$ und ξ durch die Rückholung der zu $\underline{b}$ dualen 1-Formen $(B^\mu)_{\mu=0,1,2,3}$ mit $p : \mathbb{M} \to M$ darstellen lassen als:

$$\begin{aligned} p^* B^k &= \mathsf{g}(\mathsf{b}_k^{\uparrow}, .),\ k = 1, 2, 3 \\ p^* B^0 &= \mathsf{g}(\xi, .). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Dies läßt sich durch Auswerten auf $\underline{\mathsf{b}}^{\uparrow}$ sofort verifizieren. Wir führen die Projektion $pr_1 : M \times \mathbb{R} \to M$ auf die erste Komponente ein, dann erhalten wir für die Trivialisierung von β' bzgl. Φ :

$$\begin{aligned} \Phi^*\beta' &= \Phi^*\beta + \sum_{k=1}^{3} v^k (p \circ \Phi)^* B^k - \frac{v^2}{2} (p \circ \Phi)^* B^0 \\ &= dpr_2 + \sum_{k=1}^{3} v^k pr_1^* B^k - \frac{v^2}{2} pr_1^* B^0. \end{aligned}$$

Andererseits liegt ein Tangentialvektor $v \in T_{(x,r)}(M \times \mathbb{R}),\ (x, r) \in M \times \mathbb{R}$ genau dann im horizontalen Unterraum $H'_{(x,r)}(M \times \mathbb{R}) = ker(\Phi^*\beta'_{(x,r)})$ bzgl. der mit Φ^* nach $M \times \mathbb{R}$ transportierten Zusammenhangs-1-Form $\Phi^*\beta'$, falls gilt, daß

$$d_{(x,r)} pr_2(v) = d_x g(T_{(x,r)} pr_1(v)). \tag{4.11}$$

Denn für jedes $s \in \mathbb{R}$ bildet die Abbildung $id_M \times (g + s) : M \to M \times \mathbb{R}$ die Mannigfaltigkeit M in das Bild einer Integralmannigfaltigkeit $I(\beta')$ bzgl. der Trivialisierung Φ ab. Für Tangentialvektoren $v \in H'_{(x,r)}(M \times \mathbb{R})$ gilt dann für geeignets $s \in \mathbb{R}$:

$$v = T_x(id_M \times (g + s))(T_{(x,r)} pr_1(v)). \tag{4.12}$$

Umgekehrt liegt auch jeder Tangentialvektoren $v \in T_{(x,r)}(M \times \mathbb{R})$, der Gleichung (4.12) erfüllt, in $H'_{(x,r)}(M \times \mathbb{R})$. Wendet man auf beide Seiten dieser Gleichung $d_{(x,r)}pr_2$ an, wodurch ihre Lösungsmenge nicht verändert wird, so erhält man Gleichung (4.11). Aus der Eigenschaft, daß $\Phi^*\beta'$ fundamentale vertikale Vektorfelder A^* zu $A \in Lie(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ auf A abbildet, folgt schließlich

$$\Phi^*\beta' = dpr_2 - pr_1^* dg.$$

Wir erhalten insgesamt

$$\begin{aligned} -pr_1^* dg &= \sum_{k=1}^{3} v^k pr_1^* B^k - \frac{v^2}{2} pr_1^* B^0 \\ &= pr_1^*(\sum_{k=1}^{3} v^k B^k - \frac{v^2}{2} B^0). \end{aligned}$$

Weil pr_1 surjektiv ist, ist pr_1^* injektiv, sodaß wir gemeinsam mit der Eigenschaft $dx^\mu = B^\mu,\ \forall \mu = 0, 1, 2, 3$ der Funktionen x^μ folgern, daß

$$\begin{aligned} dg &= -\sum_{k=1}^{3} v^k B^k + \frac{v^2}{2} B^0 \\ &= -\sum_{k=1}^{3} v^k dx^k + \frac{v^2}{2} dx^0. \end{aligned}$$

Nachdem M wegzusammenhängend ist, gibt es genau ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$g = \frac{v^2}{2} x^0 - \sum_{k=1}^{3} v^k x^k + c. \quad \square$$

Wir betrachten als nächstes Bargmannschnitte $\Psi : \mathbb{M} \to \mathbb{E}$ der Masse m. Wählt man auf M einen inertialen Rahmen $\underline{b} : M \to Gal(M)$ so hat man über die zugehörige inertiale Zusammenhangs-1-Form β eine Blätterung von $\mathbb{M}$ in zu M diffeomorphe Integralmannigfaltigkeiten $I(\beta)$. Diese Integralmannigfaltigkeiten unterscheiden sich untereinander auf Grund der Rechtsinvarianz von β nur durch eine konstante Rechtsoperation, d.h. zu zwei Integralmannigfaltigkeiten $I_1(\beta)$ und $I_2(\beta)$ zum selben β gibt es genau ein $r \in \mathbb{R}$, sodaß $I_2(\beta) = \delta_r(I_1(\beta))$ gilt. Weil $I_1(\beta)$ und $I_2(\beta)$ Integralmannigfaltigkeiten von einer Zusammenhangs-1-Form β des Prinzipalfaserbündels $\mathbb{M} \xrightarrow{p} M$ sind, gibt es Schnitte $s_1, s_2 : M \to \mathbb{M}$, die M diffeomorph auf $I_1(\beta)$ bzw. $I_2(\beta)$ abbilden, also $s_1(M) = I_1(\beta)$ und $s_2(M) = I_2(\beta)$. Bezüglich der im obigen Beweis auftretenden Trivialisierung Φ lassen sich diese Schnitte als Schnitte konstanter Höhe schreiben: $s_i = \Phi \circ (id_M \times r_i),\ i = 1, 2$ mit $id_M \times r_i : M \to M \times \mathbb{R} : (id_M \times r_i)(x) := (x, r_i),\ r_i \in \mathbb{R}$.

Zu jedem Bargmannschnitt $\Psi : \mathbb{M} \to \mathbb{E}$ der Masse m gibt es daher nach Auswahl einer Integralmannigfaltigkeit $I(\beta)$ der inertialen Zusammenhangs-1-Form β zu $\underline{b}$ genau einen Schnitt $\Psi_{\underline{b}} : M \to E$, der das folgende Diagramm kommutativ macht

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E} & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & E \\ {\scriptstyle \Psi}\Big\uparrow & & \Big\uparrow{\scriptstyle \Psi_{\underline{b}}} \\ \mathbb{M} & \xleftarrow{s} & M \end{array}$$

wobei $s : M \to \mathbb{M}$ der Schnitt ist, der M auf $I(\beta)$ abbildet. Aus dem Diagramm liest man ab, daß $\Psi_{\underline{b}} = \tilde{\pi} \circ \Psi \circ s$.
Wählt man eine andere Integralmannigfaltigkeit $I'(\beta) = \delta_r(I(\beta))$ der inertialen Zusammenhangs-1-Form β von $\underline{b}$, so unterscheidet sich das so entstehende $\Psi'_{\underline{b}}$ auf Grund der Transformationseigenschaft von Bargmannschnitten der Masse m entlang den Fasern von $\mathbb{M}$ nur um eine globale Phasentransformation $\exp(i\frac{m}{\hbar}r)$ von $\Psi_{\underline{b}}$:

$$\Psi'_{\underline{b}} = \exp(i\frac{m}{\hbar}r)\Psi_{\underline{b}}.$$

♣ Da globale Phasentransformationen von Schnitten die Berechnung von Erwartnungswerten nicht beeinflussen, werden wir im Folgenden oft von *dem* statt *einem* Schnitt $\Psi_{\underline{b}} : M \to E$ von Ψ zum inertialen Rahmen $\underline{b}$ sprechen. Zu zwei Schnitten $\Psi, \Phi : \mathbb{M} \to \mathbb{E}$ sind unter den Schnitten $\Psi_{\underline{b}}, \Psi_{\underline{b}} : M \to E$ immer die induzierten Schnitte zur *selben* Integralmannigfaltigkeit $I(\beta)$ der inertialen Zusammenhangs-1-Form β zu $\underline{b}$ gemeint! ♣

Der folgende Satz legt nun die Verbindung zwischen den Bargmannschnitten, die Lösung einer Schrödingergleichung auf $\mathbb{M}$ sind, und den Lösungen der Schrödingergleichungen auf M klar.

Satz 4.6 *Sei* $(\mathbb{M}, p, M, \mathrm{g})$ *eine Bargmann-Mannigfaltigkeit, F ein elektromagnetischer Feldstärketensor auf M, $\hat{\omega}$ eine basische Zusammenhangs-1-Form zu F und $\hat{\mathbb{D}}$ der Schrödinger-Bargmann-Differentialoperator zu $\hat{\omega}$. Sei weiters $\Psi : \mathbb{M} \to \mathbb{E}$ ein Bargmannschnitt und $\underline{b}$ ein inertialer Rahmen der induzierten Galileischen Mannigfaltigkeit* $(M, \theta, g\nabla)$. *Dann gilt*

(1) *Ist Ψ Lösung der Schrödingergleichung zum Schrödinger-Bargmann-Differentialoperator $\hat{\mathbb{D}}$, so ist der induzierte Schnitt $\Psi_{\underline{b}} : M \to E$ von Ψ zum inertialen Rahmen $\underline{b}$ Lösung der Schrödingergleichung zum Schrödingerdifferentialoperator $D^{\omega}_{\underline{b}}$ mit Masse m und ω der eindeutig durch $\hat{\omega} = \bar{\pi}^*\omega$ zu $\hat{\omega}$ gehörenden Zusammenhangs-1-Form auf P.*

$$\boxed{\hat{\mathbb{D}}\Psi = 0 \Rightarrow D^{\omega}_{\underline{b}}\Psi_{\underline{b}} = 0.}$$

(2) *Sei $\underline{b}' : M \to Gal(M)$ ein weiterer inertialer Rahmen, der durch eine Matrix $\gamma \in \Gamma$ mit $\underline{b}$ verknüpft ist*

$$\underline{b}' = \underline{b}\gamma,\ \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & R \end{pmatrix},\ v = (v^1, v^2, v^3)^t \in \mathbb{R}^3,\ R \in O(3).$$

Weiters seien für $\mu = 0, 1, 2, 3$ $x^\mu : M \to \mathbb{R}$ die bis auf eine additive Konstante bestimmten Funktionen auf M, die $dx^\mu = B^\mu$, $\forall \mu = 0, 1, 2, 3$ erfüllen, wobei $(B^\mu)_{\mu=0,1,2,3}$ der duale Rahmen zu $\underline{b}$ ist. Dann gilt, daß die induzierten Schnitte $\Psi_{\underline{b}}, \Psi_{\underline{b}'} : M \to E$ von Ψ zu den inertialen Rahmen $\underline{b}, \underline{b}'$ durch folgende Transformation miteinander verknüpft sind

$$\boxed{\Psi_{\underline{b}'} = e^{i\varphi}\Psi_{\underline{b}},} \quad \text{mit} \quad \varphi = \frac{m}{\hbar}(\frac{v^2}{2}x^0 - \sum_{k=1}^{3} v^k x^k + c),\ c \in \mathbb{R}.$$

(3) *Sei $\underline{b}$ ein inertialer Rahmen auf M und ω eine Zusammenhangs-1-Form zu F auf P. Sei weiters $\Psi_{\underline{b}} : M \to E$ eine Lösung der Schrödingergleichung $D^\omega_{\underline{b}}\Psi_{\underline{b}} = 0$ mit Masse m. Dann gibt es (bis auf eine globale Phase) genau einen Bargmannschnitt $\Phi : \mathbb{M} \to \mathbb{E}$ der Masse m, der Lösung der Schrödingergleichung $\hat{\mathbb{D}}\,\Phi = 0$ ist und $\Phi_{\underline{b}} = u\Psi_{\underline{b}}$ für ein $u \in U(1)$ erfüllt, wobei die zur Definition von $\hat{\mathbb{D}}$ verwendete Zusammemhangs-1-Form $\hat{\omega} := \bar{\pi}^*\omega$ ist.*

Beweis.

(1) Analoge Argumentation wie bei der Herleitung der Gleichung (3.5):
Die Vektorfelder $\mathsf{b}^\uparrow_\nu$, $\nu = 0, ..., 3$ des gelifteten Bargmannrahmens $\underline{\mathsf{b}}^\uparrow$ eines inertialen Rahmens $\underline{b}$ auf M sind tangential an die Integralmannigfaltigkeiten $I(\beta)$ der inertialen Zusammenhangs-1-Form β von $\underline{b}$ und sie projizieren auf die Vektorfelder b_ν des inertialen Rahmens $\underline{b}$ von M. Der Schnitt ist $s : M \to I(\beta)$, der M diffeomorph auf ein $I(\beta)$ abbildet (mit Umkehrabbildung $p|_{I(\beta)}$), bildet die b_ν auf die $\mathsf{b}^\uparrow_\nu$ ab. Die Einschränkung der Zusammenhangs-1-Form $\hat{\omega}$ auf $I(\beta) \times U(1)$ entspricht der Zusammenhangs-1-Form ω auf $P = M \times U(1)$ unter dem Prinzipalfaserisomorphismus $s \times id_{U(1)} : P \to I(\beta) \times U(1)$. Mit den Bezeichnungen $\hat{\nabla}$ für die zu $\hat{\omega}$ gehörende kovariante Ableitung und ∇ für die zu ω gehörende kovariante Ableitung folgt nach analoger Rechnung wie bei der Herleitung der Gleichung (3.5) die Formel

$$\boxed{(\hat{\nabla}_{\mathsf{b}^\uparrow_\nu}\Psi)_{\underline{b}} = \nabla_{b_\nu}\Psi_{\underline{b}},\ \forall \nu = 0, ..., 3.} \tag{4.13}$$

Behauptung (1) erhält man schließlich mittels der Darstellung des Schrödinger-Bargmann-Differentialoperator aus Satz 4.4 (2) und durch mehrmaliges Anwenden von (4.13).

(2) Folgt direkt aus Satz 4.5 und der Transformationseigenschaft (4.6) von Bargmannschnitten der Masse m entlang den Fasern von $\mathbb{M}$.

(3) Sei β die zu $\underline{b}$ gehörende inertiale Zusammenhangs-1-Form auf $\mathbb{M}$, $I(\beta)$ eine Integralmannigfaltigkeit von β und $s : M \to \mathbb{M}$ der Schnitt, der M auf $I(\beta)$ abbildet. Wir definieren die Einschränkung des gesuchten Φ auf $I(\beta)$ eindeutig durch $\tilde{\pi} \circ \Phi \circ s = \Psi_{\underline{b}}$. Entlang den Fasern läßt sich $\Phi|_{I(\beta)}$ nun eindeutig zu einem Bargmannschnitt Φ der Masse m erweitern. Es folgt $\Phi_{\underline{b}} = u\Psi_{\underline{b}}$ für ein $u \in U(1)$. Verwende nun die Darstellung (4.8) bzw. (4.9) des Schrödinger-Bargmann-Differentialoperator $\hat{\mathbb{D}}$ bezüglich des inertialen Rahmens $\underline{b}$. Der Schnitt $\hat{\mathbb{D}}\,\Phi$ ist ein Bargmannschnitt der Masse m auf Grund der Rechtsinvarianz der Vektorfelder $\mathsf{b}_\nu^\uparrow$ und der basischen Konstruktion von $\hat{\omega} := \bar{\pi}^*\omega$. Somit genügt es die Einschränkung von $\hat{\mathbb{D}}\,\Phi$ auf eine Integralmannigfaltigkeit $I(\beta)$ von β zu betrachten, die aber eindeutig durch den induzierten Schnitt $(\hat{\mathbb{D}}\,\Phi)_{\underline{b}} : M \to E$ charakterisiert ist. Durch mehrmaliges Anwenden der Formel (4.13) folgt nun aber $\hat{\mathbb{D}}\,\Phi = 0$. $\square$

FOLGERUNG:
Die Lösungsmengen der Schrödingergleichungen

$$\hat{\mathbb{D}}\,\Psi = 0,\ \Psi : \mathbb{M} \to \mathbb{E} \text{ Bargmannschnitt der Masse } m,$$

auf $\mathbb{M}$ zu gegebenem F haben also dieselbe Mächtigkeit wie die entsprechenden Lösungsmengen der Schrödingergleichungen mit Masse m

$$D^{\omega}_{\underline{b}}\Psi = 0,\ \Psi : M \to E,$$

auf M zum selben F, und sie können durch feste Wahl von $I(\beta)$ bijektiv ineinander übergeführt werden!

4.3 Orts- und Impulserwartungswerte

Definition der Orts- und Impulsoperatoren zu einen inertialen Beobachter:
Sei $\underline{b}$ ein inertialer Rahmen der induzierten Galileischen Mannigfaltigkeit (M, θ, g, ∇) einer Bargmann-Mannigfaltigkeit $(\mathbb{M}, p, M, \mathsf{g})$ und $\underline{B}$ der dazu duale Rahmen. Seien weiters für $\mu = 0, 1, 2, 3$ $x^\mu : M \to \mathbb{R}$ die bis auf eine additive Konstante bestimmten Funktionen auf M, die $dx^\mu = B^\mu, \forall\mu = 0, 1, 2, 3$ erfüllen. Wir bezeichnen mit $Barg^m(\mathbb{E})$ die Menge der Bargmannschnitte zur Masse m von $\mathbb{E}$ und definieren für $a = 1, 2, 3$ die **Ortsoperatoren** $\mathbb{X}^a$ zum gewählten inertialen Beobachter mit „Ursprung“ durch

$$\begin{aligned} \mathbb{X}^a : Barg^m(\mathbb{E}) &\to Barg^m(\mathbb{E}) \\ \Psi &\mapsto \mathbb{X}^a(\Psi) := p^* x^a\, \Psi = (x^a \circ p)\, \Psi. \end{aligned}$$

Sei $\underline{\mathsf{b}}^{\uparrow} = (\xi, \mathsf{b}_0^{\uparrow}, \mathsf{b}_1^{\uparrow}, \mathsf{b}_2^{\uparrow}, \mathsf{b}_3^{\uparrow})$ der geliftete Bargmannrahmen von $\underline{b}$, $\hat{\omega}$ eine basische Zusammenhangs-1-Form zu einem gegebenen elektromagnetischen Feldstärketensor F auf M und $\hat{\nabla}$ die dazugehörende kovariante Ableitung. Wir definieren unter diesen Voraussetzungen für $a = 1, 2, 3$ die **Impulsoperatoren** $\mathbb{P}^a$ durch

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}^a : Barg^m(\mathbb{E}) & \to & Barg^m(\mathbb{E}) \\ \Psi & \mapsto & \mathbb{P}^a(\Psi) := -i\hbar\hat{\nabla}_{\mathsf{b}_a^{\uparrow}}\Psi, \end{array}$$

wobei auf Grund der Rechtsinvarianz der Vektorfelder $\mathsf{b}_a^{\uparrow}$ und der basischen Konstruktion von $\hat{\omega}$ sichergestellt ist, daß $\hat{\nabla}_{\mathsf{b}_a^{\uparrow}}\Psi$ wieder ein Bargmannschnitt zur Masse m ist.

Definition und Satz 4.3 (Erwartungswerte) Sei $\Psi : \mathbb{M} \to \mathbb{E}$ eine auf 1 normierte Wellenfunktion eines spinlosen Teilchens der Masse m und $\Sigma \subset M$ ein instantaner Raum. Der *Erwartungswert* $\mathbb{E}(O, \Sigma, \Psi)$ eines Operators $O : Barg(\mathbb{E}) \to Barg(\mathbb{E})$ (z.B. Orts- oder Impulsoperator bzw. Linearkombinationen von Produkten von diesen) zum Zeitpunkt Σ und zur Wellenfunktion Ψ ist definiert als:

$$\mathbb{E}(O, \Sigma, \Psi) := \int_{\Sigma} \langle \Psi, O(\Psi) \rangle_M|_{\Sigma} \ |\mu_{\Sigma}| \, .$$

Für die Erwartunswerte der Orts- und Impulsoperatoren gilt:

$$\mathbb{E}(\mathbb{X}^a, \Sigma, \Psi) = \mathbb{E}(X^a, \Sigma, \Psi_{\underline{b}}), \ \forall a = 1, 2, 3, \tag{4.14}$$

$$\mathbb{E}(\mathbb{P}^a, \Sigma, \Psi) = \mathbb{E}(P^a, \Sigma, \Psi_{\underline{b}}), \ \forall a = 1, 2, 3, \tag{4.15}$$

wobei die X^a die Ortsoperatoren auf M zu den Funktionen x^a sind, die auch zur Definition der $\mathbb{X}^a$ verwendet wurden, und die P^a die Impulsoperatoren auf M zum selben inertialen Rahmen $\underline{b}$ sind, der auch zur Definition der $\mathbb{P}^a$ verwendet wurde, und zur Zusammenhangs-1-Form ω, die eindeutig durch $\hat{\omega} = \bar{\pi}^*\omega$ zur Zusammenhangs-1-Form $\hat{\omega}$ gehört, die zur Definition der $\mathbb{P}^a$, $a = 1, 2, 3$ verwendet wurde.
Schließlich gehorchen die Orts- und Impulserwartungswerte der Wellenfunktionen eines spinlosen Teilchens der Masse m den gewünschten Transformationsregeln bei Wechsel des inertialen Rahmens, vgl. Gleichungen (2.24) und (2.25).

Beweis.
Verwende für zwei Bargmannschnitte $\Psi, \Phi : \mathbb{M} \to \mathbb{E}$, einen inertialen Rahmen $\underline{b}$ und einen instantanen Raum Σ die Gleichungen:

$$\begin{array}{rcl} \langle \Psi, \Phi \rangle_M|_{\Sigma} & = & \langle (\Psi_{\underline{b}})_{\Sigma}, (\Phi_{\underline{b}})_{\Sigma} \rangle \\ & \text{und} & \\ ((x^a \circ p) \ \Psi)_{\underline{b}} & = & x^a \ \Psi_{\underline{b}} \\ & = & X^a(\Psi_{\underline{b}}), \\ -i\hbar(\hat{\nabla}_{\mathsf{b}_a^{\uparrow}}\Psi)_{\underline{b}} & = & -i\hbar\nabla_{b_\nu}\Psi_{\underline{b}} \\ & = & P^a(\Psi_{\underline{b}}), \end{array}$$

mit ∇ der zu ω gehörenden kovarianten Ableitung. Die gewünschten Transformationsregeln der Orts- und Impulserwartungswerte der Wellenfunktionen eines spinlosen Teilchens der Masse m folgen direkt aus den Gleichungen (4.14), (4.15) und dem Transformationsverhalten der induzierten Schnitte $\Psi_{\underline{b}}$ bei Wechsel des inertialen Rahmens, vgl. Satz 4.6 (2). $\square$

Bemerkung zur Definition der Impulsoperatoren:
Die oben verwendete Definition der Impulsoperatoren $\mathbb{P}^a$ zu einem inertialen Rahmen $\underline{b}$ und zu einer basischen Zusammenhangs-1-Form $\hat{\omega}$ eines elektromagnetischen Feldstärketensors F auf M hat einen großen Vorteil gegenüber den Impulsoperatoren P^a aus dem zweiten Kapitel:

> Die Impulsoperatoren $\mathbb{P}^a$ transformieren richtig bei Wechsel des inertialen Rahmens $\underline{b}$.

Um zu erklären, was „richtig" ist, betrachten wir die Impulsoperatoren auf einer Galileischen Mannigfaltigkeit bzgl. einem Punktteilchen der Masse m. Sei also (M, θ, g, ∇) eine Galileische Mannigfaltigkeit, $\underline{b}$ ein inertialer Rahmen mit dualem Rahmen $\underline{B} = (B^0, B^1, B^2, B^3)^t$ und Σ ein instantaner Raum. Wir wissen $B^0 = \theta$. Die Weltlinie eines Teilchens kann immer durch eine zeitangepaßte Kurve dargestellt werden:

$$\delta : I \subset \mathbb{R} \to M, \ \theta(\dot{\delta}(s)) = 1, \ \forall s \in I.$$

Die zum inertialen Rahmen $\underline{b}$ gehörenden Impulsoperatoren $\mathsf{P}^a_{\underline{b}} \in \Lambda^1(M), \ a = 1, 2, 3$ sind 1-Formen auf M und definiert durch

$$\mathsf{P}^a_{\underline{b}} := mB^a.$$

Die a-te Impulskomponente bzgl. $\underline{b}$ zum Zeitpunkt Σ $(\Sigma \cap \delta(I) \neq \emptyset)$ ist erklärt durch

$$\mathsf{P}^a_{\underline{b}}(\dot{\delta}(s_\Sigma)),$$

wobei s_Σ der eindeutige Parameterwert ist, für den $\delta(s_\Sigma) \in \Sigma$ gilt. Der springende Punkt an diesen Definitionen ist, daß man mit dem inertialen Dualrahmen $\underline{B}$ arbeitet und nicht mit dem Rahmen $\underline{b}$! Man kann daher gleich mit einem inertialen Dualrahmen $\underline{B}$ starten, d.h. mit einem Schnitt $\underline{B} : M \to Gal^*(M) \subset L^*(M)$ (duales Bündel zu $Gal(M)$ bzw. $L(M)$) mit den Eigenschaften

$$h(\underline{B}, \underline{B}^t) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla \underline{B} = 0,$$

wobei h die von g eindeutig induzierte symmetrische Bilinearform auf $T^*(M)$ ist, vgl. Satz 1.1.

Transformationseigenschaften:
Hat man zwei inertiale Rahmen $\underline{b}$ und $\underline{b}'$ die durch eine Matrix $\gamma \in \Gamma$ mit einander verknüpft sind

$$\underline{b}' = \underline{b}\gamma,\ \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & R \end{pmatrix}, \tag{4.16}$$

so transformieren die entsprechenden inertialen Dualrahmen $\underline{B}$ und $\underline{B}'$ mit der Matrix $\gamma^{-1} \in \Gamma$:

$$\underline{B}' = \gamma^{-1}\underline{B},\ \gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -R^{-1}v & R^{-1} \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich das Transformationsverhalten der Impulsoperatoren zu

$$\mathsf{P}^a_{\underline{b}'} = -m(R^{-1}v)^a\,\theta + \sum_{b=1}^{3}(R^{-1})^a_b\,\mathsf{P}^b_{\underline{b}} \tag{4.17}$$

und speziell für einen reinen „boost“ $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & \mathbf{1}_3 \end{pmatrix}$

$$\mathsf{P}^a_{\underline{b}'} = -mv^a\,\theta + \mathsf{P}^a_{\underline{b}}.$$

Für die a-ten Impulskomponenten bzgl. $\underline{b}$ bzw. $\underline{b}'$ zum Zeitpunkt Σ erhält man den Zusammenhang (wiederum für einen reinen „boost“)

$$\mathsf{P}^a_{\underline{b}'}(\dot{\delta}(s_\Sigma)) = (-mv^a\,\theta + \mathsf{P}^a_{\underline{b}})(\dot{\delta}(s_\Sigma)) = -mv^a + \mathsf{P}^a_{\underline{b}}(\dot{\delta}(s_\Sigma)). \tag{4.18}$$

Die Impulsoperatoren $P^a = -i\hbar\nabla_{b_a}$ (∇ bezeichnet die kovariante Ableitung von Schnitten in E, vgl. minimale Kopplung) aus dem zweiten Kapitel sind allerdings nicht über 1-Formen aus einem inertialen Dualrahmen sondern über die Vektorfelder eines inertialen Rahmens definiert, der nach Gleichung (4.16) transformiert. Betrachtet man etwa einen reinen „boost“ so ändern sich die Vektoren $b'_a = b_a$ und mit ihnen die entsprechenden Impulsoperatoren $P'^a = P^a$ **nicht**. Um dennoch ein Transformationsverhalten analog zu (4.18) für die Erwartungswerte der Impulsoperatoren $P'^a = P^a$ zu erhalten, vgl. Gleichung (2.25), müssen die Wellenfunktionen von inertialem Beobachter zu inertialem Beobachter entsprechend verändert werden, vgl. Seite 37.

Die Impulsoperatoren

$$\mathbb{P}^a = -i\hbar\hat{\nabla}_{\mathsf{b}^\uparrow_a} : Barg^m(\mathbb{E}) \to Barg^m(\mathbb{E})$$

sind zwar ebenfalls über Vektorfelder definiert und nicht über 1-Formen, aber die verwendeten Vektorfelder $\mathsf{b}^\uparrow_a$ aus dem gelifteten Bargmannrahmen eines inertialen Rahmens $\underline{b}$ auf M transformieren bei Wechsel vom inertialen Rahmen $\underline{b}$ zu einem inertialen

Rahmen $\underline{b}' = \underline{b}\gamma,\ \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & R \end{pmatrix}$ anders, siehe Lemma 4.3. Für die Impulsoperatoren $\mathbb{P}'^a$ zum inertialen Rahmen $\underline{b}'$ bei unveränderter basischer Zusammenhangs-1-Form $\hat{\omega}$ mit kovarianter Ableitung $\hat{\nabla}$ erhalten wir daher

$$\mathbb{P}'^a = -m(R^{-1}v)^a Id + \sum_{b=1}^{3} (R^{-1})^a_b\, \mathbb{P}^b \tag{4.19}$$

aus der Rechnung

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}'^a &= -i\hbar\hat{\nabla}_{\mathsf{b}'^{\uparrow}_a} \\
&= -i\hbar\hat{\nabla}_{[-(v^t R)^a\,\xi + \mathsf{b}^{\uparrow}_b R^b_a]} \\
&= -i\hbar\hat{\nabla}_{[-(R^{-1}v)^a\,\xi + (R^{-1})^a_b \mathsf{b}^{\uparrow}_b]}, \quad \text{(Summe über } b = 1,2,3.) \\
&= i\hbar(R^{-1}v)^a\hat{\nabla}_\xi - i\hbar\sum_{b=1}^{3}(R^{-1})^a_b\hat{\nabla}_{\mathsf{b}^{\uparrow}_b} \\
&= -m(R^{-1}v)^a Id + \sum_{b=1}^{3}(R^{-1})^a_b\,\mathbb{P}^b,
\end{aligned}$$

wobei verwendet wurde, daß nach Lemma 4.4 $\hat{\nabla}_\xi\Psi = i\frac{m}{\hbar}\Psi$ für Bargmannschnitte Ψ der Masse m gilt, und $Id : Barg^m(\mathbb{E}) \to Barg^m(\mathbb{E})$ die Identitätsoperation bezeichnet. Man erhält also das zu Gleichung (4.17) analoge Transformationsverhalten der Impulsoperatoren, das wir als „richtig“ bezeichnen.

Schließlich bietet die Struktur einer Bargmann-Mannigfaltigkeit, die Möglichkeit, die Impulsoperatoren $\mathbb{P}^a$, ohne Umweg über inertiale Rahmen, direkt zu einem inertialen Dualrahmen $\underline{B} = (B^0, B^1, B^2, B^3)^t$ auf M zu definieren:
Ausgehend von einer 1-Form $B^a,\ a \in \{1,2,3\}$ aus $\underline{B}$ bilden wir deren Rückholung p^*B^a auf $\mathbb{M}$ bzgl. $p : \mathbb{M} \to M$. Mit der nicht-entarteten Metrik g auf $\mathbb{M}$ können wir dieser 1-Form genau ein Vektorfeld $Y^a \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$ zuordnen. Nach Gleichung (4.10) ist Y^a gerade das a-te Vektorfeld des gelifteten Bargmannrahmens $\underline{\mathsf{b}}^{\uparrow}$ des zu $\underline{B}$ gehörenden inertialen Rahmens $\underline{b}$. Definieren wir also, nach Wahl einer basischen Zusammenhangs-1-Form $\hat{\omega}$ mit kovarianter Ableitung $\hat{\nabla}$, den zu B^a gehörenden Impulsoperator $\mathbb{P}^a$ durch

$$\mathbb{P}^a := -i\hbar\hat{\nabla}_{Y^a},$$

so erhalten wir gerade den a-ten Impulsoperator zum inertialen Rahmen $\underline{b}$ und zur basischen Zusammenhangs-1-Form $\hat{\omega}$ von Seite 85. Ordnet man weiters der Zeit-1-Form θ den Identitätsoperator Id zu, so erhält man die gewünschte Äquivarianz zwischen den

Impulsoperatoren auf der Galileischen Mannigfaltigkeit und jenen auf der Bargmann-Mannigfaltigkeit, nämlich

$$\begin{aligned} mB'^a &= -m(R^{-1}v)^a\,\theta + \sum_{b=1}^{3}(R^{-1})^a_b\, mB^b \\ \mathbb{P}'^a &= -m(R^{-1}v)^a Id + \sum_{b=1}^{3}(R^{-1})^a_b\, \mathbb{P}^b. \end{aligned}$$

4.4 Das Stromdichtevektorfeld

In diesem Abschnitt zeigen wir, daß im Rahmen der Theorie auf einer Bargmann-Mannigfaltigkeit das Stromdichtevektorfeld $j \in \mathfrak{X}(M)$ einer Wellenfunktion $\Psi : \mathbb{M} \to \mathbb{E}$ ohne Wahl eines inertialen Beobachters definiert werden kann.

Sei also $(\mathbb{M}, p, M, \mathsf{g})$ eine Bargmann-Mannigfaltigkeit, F ein elektromagnetischer Feldstärketensor auf M, $\hat{\omega}$ eine basische Zusammenhangs-1-Form zu F mit kovarianter Ableitung $\hat{\nabla}$ und $\Psi : \mathbb{M} \to \mathbb{E}$ Wellenfunktion eines spinlosen Teilchens der Masse m. Wir definieren die komplexwertige 1-Form $\langle \Psi, \hat{\nabla}\Psi \rangle_B$ auf $\mathbb{M}$ durch

$$\langle \Psi, \hat{\nabla}\Psi \rangle_B(v) := \langle \Psi(y), \hat{\nabla}_v \Psi \rangle_B,\ \forall y \in \mathbb{M},\ v \in T_y(\mathbb{M})$$

und bezeichnen deren komplexe Konjugation mit $\overline{\langle \Psi, \hat{\nabla}\Psi \rangle_B}$. Als nächsten Schritt definieren wir eine reellwertige 1-Form $\alpha \in \Lambda^1(\mathbb{M})$ auf $\mathbb{M}$:

$$\alpha := -i\frac{\hbar}{2m}(\langle \Psi, \hat{\nabla}\Psi \rangle_B - \overline{\langle \Psi, \hat{\nabla}\Psi \rangle_B}\,).$$

Auf Grund der basischen Konstruktion von $\hat{\omega}$, der charakteristischen Eigenschaft (4.6) von Bargmannschnitten und der Sesquilinearität von $\langle .,. \rangle_B$ ist α rechtsinvariant bzgl. der Operation der Strukturgruppe $(\mathbb{R}, +)$ auf $\mathbb{M}$, also

$$\delta_r^* \alpha = \alpha,\ \forall r \in \mathbb{R}.$$

Mit Hilfe der nicht-entarteten Metrik g auf $\mathbb{M}$ läßt sich nun der 1-Form α genau ein Vektorfeld $j_B \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$ zuordnen:

$$\alpha =: \mathsf{g}(j_B, .).$$

Dieses Vektorfeld ist wiederum rechtsinvariant, d.h.

$$(\delta_r)_* j_B = j_B,\ \forall r \in \mathbb{R}. \tag{4.20}$$

Denn es gilt $\delta_r^*[\mathsf{g}(j_B,.)] = \mathsf{g}(j_B,.),\ \forall r \in \mathbb{R}$, und daraus folgt für ein beliebiges Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$, daß

$$\begin{aligned}
\delta_r^*[\mathsf{g}(j_B,.)](X) &= \mathsf{g}(j_B,(\delta_r)_*X)\circ\delta_r \\
&= \mathsf{g}((\delta_r)_*(\delta_{-r})_*j_B,(\delta_r)_*X)\circ\delta_r \\
&= (\delta_r^*\mathsf{g})((\delta_{-r})_*j_B,X) \\
&= \mathsf{g}((\delta_{-r})_*j_B,X) \\
&= \mathsf{g}(j_B,X).
\end{aligned}$$

Da g nicht entartet ist und $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$ beliebig war, folgt $(\delta_{-r})_*j_B = j_B,\ \forall r \in \mathbb{R}$, womit (4.20) gezeigt ist. Wegen der Rechtsinvarianz projiziert j_B wohldefiniert auf ein Vektorfeld $j \in \mathfrak{X}(M)$, das wir das **Stromdichtevektorfeld** der Wellenfunktion Ψ nennen. Es gilt

$$j(x) = T_y p(j_B(y)),\ \text{für ein } y \in p^{-1}(x),\ \forall x \in M.$$

Im Folgenden zeigen wir, daß durch diese Definition von j das übliche Stromdichtevektorfeld, vgl. etwa [Gal2, p.203] rekonstruiert wurde:
Sei $\underline{b} : M \to Gal(M)$ ein inertialer Rahmen der induzierten Galileischen Mannigfaltigkeit (M,θ,g,∇) und $\underline{\mathsf{b}}^\uparrow = (\xi,\mathsf{b}_0^\uparrow,\mathsf{b}_1^\uparrow,\mathsf{b}_2^\uparrow,\mathsf{b}_3^\uparrow)$ der geliftete Bargmannrahmen von $\underline{b}$ mit Dualrahmen $\underline{\mathsf{B}}^\uparrow = (\Xi,\mathsf{B}_0^\uparrow,\mathsf{B}_1^\uparrow,\mathsf{B}_2^\uparrow,\mathsf{B}_3^\uparrow)^t$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\hat{\nabla}\Psi &= (\hat{\nabla}_\xi\Psi)\,\Xi + \sum_{\mu=0}^{3}(\hat{\nabla}_{\mathsf{b}_\mu^\uparrow}\Psi)\mathsf{B}_\mu^\uparrow \\
\langle\Psi,\hat{\nabla}\Psi\rangle_B &= \langle\Psi,\hat{\nabla}_\xi\Psi\rangle_B\,\Xi + \sum_{\mu=0}^{3}\langle\Psi,\hat{\nabla}_{\mathsf{b}_\mu^\uparrow}\Psi\rangle_B\,\mathsf{B}_\mu^\uparrow \\
&= i\frac{m}{\hbar}\langle\Psi,\Psi\rangle_B\,\Xi + \sum_{\mu=0}^{3}\langle\Psi,\hat{\nabla}_{\mathsf{b}_\mu^\uparrow}\Psi\rangle_B\,\mathsf{B}_\mu^\uparrow.
\end{aligned}$$

Für die komplexwertige 1-Form $\overline{\langle\Psi,\hat{\nabla}\Psi\rangle_B}$ auf $\mathbb{M}$ gilt dann

$$\overline{\langle\Psi,\hat{\nabla}\Psi\rangle_B} = -i\frac{m}{\hbar}\langle\Psi,\Psi\rangle_B\,\Xi + \sum_{\mu=0}^{3}\overline{\langle\Psi,\hat{\nabla}_{\mathsf{b}_\mu^\uparrow}\Psi\rangle_B}\,\mathsf{B}_\mu^\uparrow.$$

Aus der einfachen Gestalt von

$$\mathsf{g}((\underline{\mathsf{b}}^\uparrow)^t,\underline{\mathsf{b}}^\uparrow) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_3 \end{pmatrix}$$

läßt sich j_B berechnen zu

$$\begin{aligned} j_B &= -i\frac{\hbar}{2m}\Big(\sum_{k=1}^{3}(\,\langle\Psi,\hat{\nabla}_{\mathsf{b}_k^\uparrow}\Psi\rangle_B - \overline{\langle\Psi,\hat{\nabla}_{\mathsf{b}_k^\uparrow}\Psi\rangle_B}\,)\,\mathsf{b}_k^\uparrow + \\ &\quad + (\,\langle\Psi,\hat{\nabla}_{\mathsf{b}_0^\uparrow}\Psi\rangle_B - \overline{\langle\Psi,\hat{\nabla}_{\mathsf{b}_0^\uparrow}\Psi\rangle_B}\,)\,\xi + \\ &\quad + i2\frac{m}{\hbar}\langle\Psi,\Psi\rangle_B\,\mathsf{b}_0^\uparrow\Big). \end{aligned}$$

Wir verwenden nun, siehe (4.13), daß

$$\langle\Psi,\hat{\nabla}_{\mathsf{b}_\mu^\uparrow}\Psi\rangle_B = \langle\Psi_{\underline{b}},\nabla_{b_\nu}\Psi_{\underline{b}}\rangle\circ p$$

gilt, wobei für zwei beliebige Schnitte $\Psi_{\underline{b}},\Phi_{\underline{b}}: M\to E$ die komplexwertige Funktion

$$\begin{aligned} \langle\Psi_{\underline{b}},\Phi_{\underline{b}}\rangle : M &\to \mathbb{C} \quad \text{durch} \\ \langle\Psi_{\underline{b}},\Phi_{\underline{b}}\rangle(x) &:= \langle\Psi_{\underline{b}}(x),\Phi_{\underline{b}}(x)\rangle,\ \forall x\in M \end{aligned}$$

definiert wurde, und ∇ die kovariante Ableitung zu ω ($\hat{\omega}=\bar{\pi}^*\omega$) bezeichnet. Weiters definieren wir die zu Ψ gehörende Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $\rho: M\to\mathbb{R}$ durch

$$\rho := \langle\Psi,\Psi\rangle_M.$$

Es folgt sofort $\rho=\langle\Psi_{\underline{b}},\Psi_{\underline{b}}\rangle$. Schließlich erhalten wir

$$j = \rho\, b_0 - i\frac{\hbar}{2m}\sum_{k=1}^{3}(\,\langle\Psi_{\underline{b}},\nabla_{b_k}\Psi_{\underline{b}}\rangle - \overline{\langle\Psi_{\underline{b}},\nabla_{b_k}\Psi_{\underline{b}}\rangle}\,)\,b_k,$$

was zu zeigen war.

Folgerung:
Die Rechnung zeigt auch, daß der Ausdruck

$$\langle\Psi_{\underline{b}},\Psi_{\underline{b}}\rangle\, b_0 - i\frac{\hbar}{2m}\sum_{k=1}^{3}(\,\langle\Psi_{\underline{b}},\nabla_{b_k}\Psi_{\underline{b}}\rangle - \overline{\langle\Psi_{\underline{b}},\nabla_{b_k}\Psi_{\underline{b}}\rangle}\,)\,b_k$$

unabhängig vom gewählten inertialen Beobachter $\underline{b}$ ist, sofern für die $\Psi_{\underline{b}}$ immer die entsprechenden Wellenfunktionen zum jeweiligen inertialen Beobachter $\underline{b}$ eingesetzt werden, vgl. Seite 37.

4.5 Die Bargmann-Mannigfaltigkeiten zu M

In diesem Abschnitt zeigen wir, daß man bei Vorgabe einer Galileischen Mannigfaltigkeit $\mathcal{G} = (M, \theta, g, \nabla)$ immer eine Bargmann-Mannigfaltigkeit $\mathcal{B} = (\mathbb{M}, p, M, \mathsf{g})$ finden kann, deren induzierte Galileische Mannigfaltigkeit $\mathcal{G}_{\mathcal{B}}$ gleich $\mathcal{G}$ ist. Die Bargmann-Mannigfaltigkeit $\mathcal{B}$ ist allerdings nicht eindeutig, alle Bargmann-Mannigfaltigkeiten $\mathcal{B}$ mit obiger Eigenschaft sind aber isomorph zueinander. Eine exaktere Formulierung gibt der folgende

Satz 4.7 *Sei $\mathcal{G} = (M, \theta, g, \nabla)$ eine (vollständige) Galileische Mannigfaltigkeit. Dann gilt*

(1) *Es gibt eine (vollständige) Bargmann-Mannigfaltigkeit $\mathcal{B} = (\mathbb{M}, p, M, \mathsf{g})$, sodaß deren induzierte Galileische Mannigfaltigkeit $\mathcal{G}_{\mathcal{B}}$ gleich $\mathcal{G}$ ist.*

(2) *Jedes weitere $(\mathbb{R}, +)$-Prinzipalfaserbündel $(\mathbb{M}', p', M)$ über M läßt sich zu einer (vollständigen) Bargmann-Mannigfaltigkeit $\mathcal{B}' = (\mathbb{M}', p', M, \mathsf{g}')$ erweitern, sodaß deren induzierte Galileische Mannigfaltigkeit $\mathcal{G}_{\mathcal{B}'}$ gleich $\mathcal{G}$ ist.*

(3) *Je zwei Bargmann-Mannigfaltigkeiten $\mathcal{B} = (\mathbb{M}, p, M, \mathsf{g})$ und $\mathcal{B}' = (\mathbb{M}', p', M, \mathsf{g}')$, deren induzierte Galileische Mannigfaltigkeit gleich $\mathcal{G}$ ist, sind isomorph zueinander.*

Beweis.

(1) Wir definieren $\mathbb{M} := M \times \mathbb{R}$ und $p := pr_1 : \mathbb{M} \to M$ die Projektion auf die erste Komponente. Das Tripel $(\mathbb{M}, p, M)$ ist mit der kanonischen Rechtsoperation

$$\begin{aligned} \delta : \mathbb{M} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{M} \\ ((x, s), r) &\mapsto \delta((x, s), r) := \delta_r(x, s) := (x, s + r) \end{aligned}$$

ein $(\mathbb{R}, +)$-Prinzipalfaserbündel über M. Wir bezeichnen mit $\xi \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$ das zu $1 \in Lie(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ gehörende fundamentale, vertikale Vektorfeld auf $\mathbb{M}$. Sei nun $\underline{b} : M \to Gal(M)$ ein inertialer Rahmen von $\mathcal{G}$ und $\underline{\mathsf{b}} = (\xi, \underline{b} \circ p)$ der um ξ erweiterte Rahmen von $\mathbb{M}$. Wir identifizieren dabei $\forall (x, r) \in M \times \mathbb{R}$ die Tangentialräume $T_{(x,r)}(M \times \mathbb{R})$ mit der direkten Summe $T_x(M) \oplus T_r(\mathbb{R})$, vgl. [Ish, p.21] und Seite 67 dieser Ausarbeitung. Mit dem Rahmen $\underline{\mathsf{b}}$ definieren wir eindeutig eine Metrik g auf $\mathbb{M}$ mit Signatur $(+, +, +, +, -)$:

$$\mathsf{g}(\underline{\mathsf{b}}^t, \underline{\mathsf{b}}) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_3 \end{pmatrix}$$

Schließlich definieren wir noch durch $\bar{\nabla} \underline{\mathsf{b}} = 0$ eindeutig einen linearen Zusammenhang $\bar{\nabla}$ auf $\mathbb{M}$. $\bar{\nabla}$ ist nach Definition krümmungsfrei und verträglich mit g.

Weiters ist $\bar{\nabla}$ torsionsfrei, weil sich der parallele Rahmen $\underline{\mathsf{b}}$ lokal immer mittels einer Karte $\Phi : \mathbb{U} \to \Phi(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}^5$ von $\mathbb{M}$ als $\underline{\mathsf{b}}|_{\mathbb{U}} = \underline{\partial}^{\Phi}$ darstellen läßt. Verwende nämlich für Φ Karten vom Typ

$$\Phi := (\varphi \circ p \times pr_2) \ : \ \mathbb{U} := p^{-1}(U) \to \Phi(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}^5,$$

mit (φ, U) inertiale Karte von $\mathcal{G}$ und $pr_2 : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ die Projektion auf die zweite Komponente. Auf Grund der Eindeutigkeit des Levi-Civita-Zusammenhangs folgt, daß $\bar{\nabla}$ der Levi-Civita-Zusammenhang von g ist. Die Verträglichkeitseigenschaften $\mathsf{g}(\xi, \xi) = 0$ und $\bar{\nabla}\xi$ sind nach Definition von g und $\bar{\nabla}$ erfüllt. Wir haben also gezeigt, daß $\mathcal{B} := (\mathbb{M}, p, M, \mathsf{g})$ eine Bargmann-Mannigfaltigkeit ist. Falls $\mathcal{G}$ eine vollständige Galileische Mannigfaltigkeit ist, dann gibt es eine globale inertiale Karten, etwa $\varphi : M \to \mathbb{R}^4$, von M, sodaß in der zugehörigen globalen Karte $\Phi := (\varphi \circ p \times pr_2) : \mathbb{M} \to \mathbb{R}^5$ von $\mathbb{M}$ die Geodätengleichung für $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, $\epsilon > 0$

$$\frac{d^2(\Phi \circ \gamma)}{dt^2} = 0$$

lautet. Die Geodäten lassen sich also immer auf ganz $\mathbb{R}$ ausdehnen und entsprechen in der globalen Karte Φ den Geraden im $\mathbb{R}^5$. Die Bargmann-Mannigfaltigkeit $\mathcal{B}$ ist daher ebenfalls vollständig. Da $\underline{\mathsf{b}}$ gerade der geliftete Bargmannrahmen $\underline{\mathsf{b}}^{\uparrow}$ von $\underline{b}$ ist, folgt, durch Auswerten der Formeln (4.1) und (4.2) auf $\underline{b}$ und $\underline{\mathsf{b}}^{\uparrow}$, und wegen der Parallelität von $\underline{b}$, daß die von $\mathcal{B}$ induzierte Galileische Mannigfaltigkeit $\mathcal{G}_{\mathcal{B}}$ gleich $\mathcal{G}$ ist.

(2) Sei $(\mathbb{M}', p', M)$ ein weiteres $(\mathbb{R}, +)$-Prinzipalfaserbündel über M. Nach [Dieu3, p.5,80f,90] ist $(\mathbb{M}', p', M)$ trivialisierbar, vgl. Seite 62 dieser Ausarbeitung, d.h. es gibt einen Prinzipalfaserisomorphismus $\Phi : \mathbb{M}' \to M \times \mathbb{R}$. Auf $\mathbb{M} = M \times \mathbb{R}$ haben wir in (1) eine Metrik g definiert, die wir nun mit Φ zu einer Metrik $\mathsf{g}' := \Phi^*\mathsf{g}$ auf $\mathbb{M}'$ zurückholen können. Das Quadrupel $\mathcal{B}' := (\mathbb{M}', p', M, \mathsf{g}')$ ist dann mit analogen Argumenten zu (1) eine (vollständige) Bargmann-Mannigfaltigkeit, deren induzierte Galileische Mannigfaltigkeit $\mathcal{G}_{\mathcal{B}'}$ gleich $\mathcal{G}$ ist. Verwende, daß der auf $\mathbb{M}'$ geliftete Bargmannrahmen $\underline{\mathsf{b}}'^{\uparrow}$ eines inertialen Rahmens $\underline{b}$ auf M der mit Φ nach $\mathbb{M}'$ transportierte Rahmen $(\Phi^{-1})_*(\underline{\mathsf{b}}^{\uparrow})$ des auf $\mathbb{M}$ gelifteten Bargmannrahmens $\underline{\mathsf{b}}^{\uparrow}$ von $\underline{b}$ ist.

(3) Seien $\mathcal{B} = (\mathbb{M}, p, M, \mathsf{g})$ und $\mathcal{B}' = (\mathbb{M}', p', M, \mathsf{g}')$ zwei Bargmann-Mannigfaltigkeiten, deren induzierte Galileische Mannigfaltigkeit gleich $\mathcal{G}$ ist. Wir wählen auf M einen inertialen Rahmen $\underline{b}$ und erhalten auf $\mathbb{M}$ bzw. $\mathbb{M}'$ inertiale Zusammenhangs-1-Formen β bzw. β'. Es gibt dann zwei zugehörige Trivialisierungen $\Phi : \mathbb{M} \to M \times \mathbb{R}$ und $\Phi' : \mathbb{M}' \to M \times \mathbb{R}$, vgl. Beweis zu Definition und Satz 4.2. Die Trivialisierungen Φ und Φ' definieren auf dem trivialen $(\mathbb{R}, +)$-Prinzipalfaserbündel $(M \times \mathbb{R}, pr_2, M)$ über M mit der entsprechenden Konstruktion wie in (2) dieselbe Struktur einer (vollständigen) Bargmann-Mannigfaltigkeit $(M \times \mathbb{R}, pr_2, M, \bar{\mathsf{g}})$.

Schaltet man die Isomorphismen Φ^{-1} und Φ' zu $\Phi^{-1} \circ \Phi'$ hintereinander, so erhält man den gewünschten Isomorphismus zwischen $\mathbb{M}'$ und $\mathbb{M}$, der die Strukturen von $\mathcal{B}'$ in die von $\mathcal{B}$ überführt. $\square$

Literaturverzeichnis

[Cur] Curtis, W.D., Miller, F.R.: *Differential Manifolds and Theoretical Physics.* Academic Press (1985).

[Dan] Daniel, M., Viallet, C.M.: *The geometrical setting of gauge theories of the Yang-Mills type.* Rev. Mod. Phys. **52**, 175-197 (1980).

[Dieu3] Dieudonné, J.: *Eléments d'analyse - Tome 3, Chapitres 16 et 17.* Gauthiers-Villars (1970).

[Dom] Dombrowski, H.D., Horneffer, K.: *Die Differentialgeometrie des Galileischen Relativitätsprinzips.* Math. Zeitschr. **86**, 291-311 (1964).

[Duv] Duval, C.: *Nonrelativistic Conformal Symmetries and Bargmann Structures*, in *Conformal Groups and Related Symmetries - Physical Results and Mathematical Background*, Hsg. Barut, A.O. und Doebner, H.-D., Springer (Lecture Notes in Physics - Vol. 261), 162-182 (1986).

[Duv.et.al.] Duval, C., Burdet, G., Künzle, H.P., Perrin, M.: *Bargmann structures and Netwon-Cartan theory.* Phys. Rev. D **31**, 1841-1853 (1985).

[Egu] Eguchi, T., Gilkey P.B., Hanson, A.J.: *Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry.* Phys. Rep. **66**, 213-393 (1980).

[Gal1] Galindo, A., Pascual, P.: *Quantum Mechanics 1.* Springer (Texts and Monographs in Physics) (1990).

[Gal2] Galindo, A., Pascual, P.: *Quantum Mechanics 2.* Springer (Texts and Monographs in Physics) (1991).

[Ger1] Geroch, R.: *Spinor Structures of Space-Times in General Relativity.I.* J. Math. Phys. **9**, 1739-1744 (1968).

[Ger2] Geroch, R.: *Space-Time Structure from a Global Viewpoint*, in *Relatività generale e Cosmologia*, Rendiconti della Scuola Internazionale Di Fisica «Enrico Fermi», 47.Corso, Hsg. Sachs, R.K., Academic Press, 71-103 (1971).

[Gre2] Greub, W., Halperin, S., Vanstone, R.: *Connections, Curvature, and Cohomology - Vol.2*. Academic Press (1973).

[Gui] Guillemin, V., Pollack A.: *Differential Topology*. Prentice-Hall (1974).

[Heu] Heuser, H.: *Lehrbuch der Analysis - Teil 2*. 5.Auflage, Teubner (1990).

[Hus] Husemoller, D.: *Fibre Bundles*. Second Edition, Springer (1966).

[Ish] Isham, C.J.: *Modern differential geometry for physicists*. World Scientific Publ. Co. (1989).

[Jän] Jänich, K.: *Topologie*. 5.Auflage, Springer (1996).

[Kob1] Kobayashi, S., Nomizu, K.: *Foundations of Differential Geometry - Vol.1*. J.Wiley, Wiley Classics Library Edition Published (1996).

[Kol] Kolář, I., Michor, P.W., Slovák, J.: *Natural Operations in Differential Geometry*. Springer (1993).

[Kün] Künzle, H.P.: *Galilei and Lorentz structures on space-time: Comparison of the corresponding geometry and physics*. Ann. Inst. Henri Poincaré, Sec.A **17**, 337-362 (1972).

[Loo1] Loos, O.: *Analytische Mechanik*. Seminarausarbeitung, Universität Innsbruck (1982).

[Loo2] Loos, O.: *Automorphism Groups of Classical Mechanical Systems*. Mh. Math. **100**, 277-292 (1985).

[Mar1] Marathe, K.B., Martucci G.: *The Mathematical Foundations of Gauge Theories*. North-Holland (Studies in Mathematical Physics - Vol. 5) (1992).

[Mar2] Marathe, K.B.: *A condition for paracompactness of a manifold*. J. Diff. Geom. **7**, 571-573 (1972).

[Nak] Nakahara, M.: *Geometry, Topology and Physics*. Adam Hilger (1990).

[Rot] Rothleitner, J.: *Die Prinzipien der Mechanik*. Universität Innsbruck (1986), vgl. http://info.uibk.ac.at/c/c7/c705/staff/jr.html.

[Sch] Schottenloher, M.: *Geometrie und Symmetrie in der Physik*. Vieweg (1995).

[Soc] Socolovsky, M.: *Gauge transformations and fiber bundle theory*. J. Math. Phys. **32**(9), 2522-2531 (1991).

[Stö] Stöcker, R.: *Algebraische Topologie*. Teubner (1988).

[Tra] Trautman, A.: *Fibre bundles associated with space-time*. Rep. Math. Phys. **1**, 29-62 (1970).

[Tul1] Tulczyjew, W.M.: *Mécanique ondulatoire dans l'espace-temps newtonien*. C. R. Acad. Sci. Paris, t. **301**, Sér. I, nr. 8, 419-421 (1985).

[Tul2] Tulczyjew, W.M.: *An intrinsic formulation of nonrelativistic analytical mechanics and wave mechanics*. J. Geom. Phys. **2**, n. 3, 93-105 (1985).

[Wel] Wells, R.O.: *Differential Analysis on Complex Manifolds*. Springer (Graduate Texts in Mathematics - Vol. 65) (1980).

Danksagung und Lebenslauf

Ich danke

- Herrn Doz. Gebhard Grübl für seine instruktiven Vorlesungen und Gespräche, seine Geduld, die freie Themenauswahl und nicht zuletzt für die Bereitschaft, mich zu betreuen.

- Herrn Prof. Ottmar Loos für seine exzellenten Vorlesungen und Skripten, die Diskussionen über viele Teile der Arbeit, die Korrekturen und Verbesserungsvorschläge und sein Interesse an dieser Arbeit im Allgemeinen.

- Herrn Prof. Josef Rothleitner für seinen hervorragenden Vorlesungszyklus in theoretischer Physik.

- meinen Studienkollegen Wieland Alge, Stefan Steidl, Armin und Olaf Nairz, Wolfgang Dür, Martin Zeindl, Raimund Moser, Cosmas Peter, etc. für die anregenden Diskussionen mathematischer, physikalischer und „alltäglicher“ Natur.

- meinen Eltern für die finanzielle Unterstützung, das Vertrauen und dafür, daß ich überhaupt da bin.

- allen Freunden und Bekannten, unter denen namentlich Tamara Stupp und Stefan Strammer (trotz Amnesie) genannt werden wollen, für ihre unbezahlbare und irreversible Gesellschaft.

- Calvin und Hobbes, Flan O’Brien, Douglas Adams, Stereo Total, Akela, ... und Marlies.

Aus meinem Leben

Klaus RHEINBERGER

28. November 1972	Als drittes Kind von Erna Rheinberger geb. Burtscher und Manfred Rheinberger erblicke ich in Feldkirch das Licht der Welt.

1979 - 1983	Besuch der Volksschule in Feldkirch-Altenstadt
1983 - 1991	Besuch des Bundesgymnasiums Feldkirch
Juni 1991	Reifeprüfung ebd.
Oktober 1991	Beginn des Physikstudiums in Innsbruck
Februar 1994 - Juli 1994	Auslandssemester (Erasmus) in Padova
Oktober 1996	Beginn des Lehramtsstudiums Physik und Mathematik
Frühjahr 1997	Beginn der Diplomarbeit
Februar 1999 - Jänner 2000	Zivildienst an der Klinik Innsbruck