

Ingenieurmathematik

Klaus Rheinberger, FH Vorarlberg

19. Januar 2024

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	3
1 Grundkonzepte	7
1.1 Methoden	7
1.2 Beispiele	26
1.3 Aufgaben	33
2 Vektorrechnung	39
2.1 Methoden	39
2.2 Beispiele	45
2.3 Aufgaben	48
3 Komplexe Zahlen	52
3.1 Methoden	52
3.2 Beispiele	58
3.3 Aufgaben	62
4 Differentialrechnung	66
4.1 Methoden	66
4.2 Beispiele	75
4.3 Aufgaben	81
5 Integralrechnung	87
5.1 Methoden	87
5.2 Beispiele	96
5.3 Aufgaben	100
6 Differentialgleichungen	104
6.1 Methoden	104
6.2 Beispiele	111
6.3 Aufgaben	120
7 Scientific Computing	128
7.1 Einleitung	128
7.2 Installation	129
7.3 Einführung	129
Literaturverzeichnis	135

Vorwort

Dieses Skriptum dient als Lernunterlage für die [Lehrveranstaltung Ingenieurmathematik](#) in den Bachelorstudiengängen Mechatronik sowie Elektronik und Informationstechnologie Dual der [FH Vorarlberg](#). Die Lehrveranstaltung umfasst fünf ECTS-Punkte.

Lehrinhalte

In [Abbildung 1](#) sind die behandelten Lehrinhalte und Ihre Abhängigkeiten dargestellt. Die Themen Grundkonzepte und Scientific Computing haben Verbindungen zu allen anderen Themen.

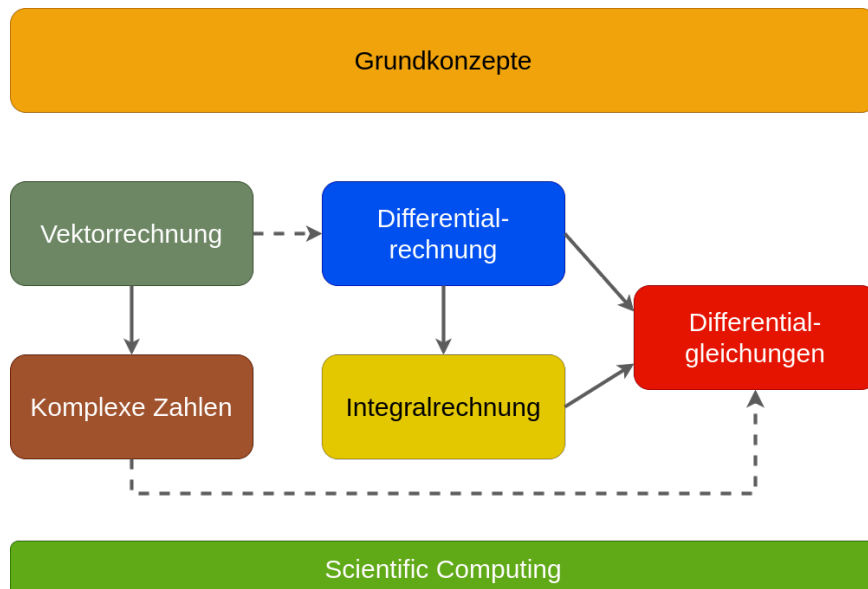


Abbildung 1: Themenlandkarte

Grundkonzepte

- Mengenlehre: Notation von Mengen und Elementen, Zahlenmengen inkl. \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 , Intervalle, Quantoren, Summennotation und Indizierung, Folgen und Reihen, Visualisierungen: Zahlenstrahl, Venn-Diagramme, Ebene, Raum
- Mathematische Aussagen und einfache Beweistechniken: Aussagen, Richtungen/Typen von Folgerungen, Äquivalenz(umformungen), Darstellung mit Mengen, (in)direkter Beweis, Gegenbeispiel

- Funktionen: Beschreibung von quantitativen Zusammenhängen als Motivation, Allg. Definition inkl. Definitionsmenge und Bildmenge, reelle Funktionen $D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, elementare Funktionen (Geraden, Betrag, Polynome, rationale, trigonometrische, Exponentialfunktion und Logarithmus), Graph, Operationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division), injektiv, surjektiv, bijektiv, Umkehrfunktionen und Gleichungen, Nullstellen, Polstellen, heuristischer Grenzwertbegriff und Limes-Notation, Stetigkeit, Monotonie, Periodizität, Symmetrie, Skalieren und Verschieben, Hintereinanderschalten
- Anwendungen: Mengen math. formulieren, visualisieren und in Worten beschreiben; Funktionen aus der Physik, Elektrotechnik, etc. vgl. [Wikipedia](#), Definitions- und Lösungsmengen von mathematischen Problemen, Interpretieren von Graphen und Termen
- Computer: arithmetische und geometrische Reihenformel nachrechnen, Graph einer Funktion in einem Bereich plotten inkl. Achsenbeschriftung

Vektorrechnung

- Motivation: Anwendungen von Vektoren als Punkte, Ortsvektoren, Zeiger, Pfeile, Richtungen, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kräfte, Signale, Preise, Listen etc.
- Ebene \mathbb{R}^2 und Raum \mathbb{R}^3 als anschauliche Vektorräume, Definition der Vektorräume \mathbb{R}^n , Koordinaten, Punkte, Orts- und Verbindungsvektoren, Rechenoperationen (+, -, Skalarmultiplikation) und ihre geometrische Bedeutung
- inneres Produkt: Projektion, Rechenregeln, Länge, Winkel, Arbeit, Einheitsvektoren, orthogonale Vektoren, Standardbasisvektoren
- Geraden, Ebenen, Konturlinien, Kreise, Kreuz- und Spatprodukt, Fläche und Volumen, lineare (Un-)Abhängigkeit, lineare Gleichungssysteme für geometrisch interpretierbare Dimensionen

Komplexe Zahlen

- Motivation: Erweiterung des Zahlenraums $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ermöglicht das Lösen neuer Probleme vgl. negative Zahlen, Brüche, Diagonale des Quadrats. Anwendungen in der Elektrotechnik, Signalanalyse, Regelungstechnik, Quantenmechanik etc.
- Definition einer komplexen Zahl als $a + jb$ mit $j^2 = -1$, komplexe Zahlenebene, Verbindung zu Vektorrechnung im \mathbb{R}^2 , Rechnen in kartesischer Darstellung, Betrag und Winkel, Polardarstellung, Eulersche Formel inkl. Definition von e^x mittels Reihe, Rechnen in Polardarstellung, Wechseln der Darstellung, Drehstreckung bzw. Drehstauchung, Dividieren, Potenzieren, Wurzelziehen und algebraische Gleichungen, Fundamentalsatz der Algebra
- Anwendungen: harmonische Schwingung als Real- oder Imaginärteil von $e^{j\omega t}$, Überlagerung gleichfrequenter harmonischer Schwingungen, komplexe Widerstände und Wechselstrom/spannung, Winkeladditionstheoreme
- Computer: $e^{j\varphi}$, $\cos(\varphi)$, $\sin(\varphi)$ mittels Reihe approximiert berechnen, Wechselstrom und -spannung über der Zeit darstellen

Differentialrechnung

- Motivation: Begriffe wie Änderungsrate, spezifische Wärme, Geschwindigkeit, Preis etc., Anwendungen in allen Naturwissenschaften und in der Technik, Optimierungsproblemen, Lösen von nicht-linearen Gleichungen, lineare Approximation von nicht-linearen Systemen

- geometrische Veranschaulichungen (dy vs. Δy , Steigung der Tangente), Limes des Differenzenquotienten am Bsp. $f(x) = x^2$, Ableitung $f'(x)$ und Differential dy einer Funktion, Ableitung elementarer Funktionen (Geraden, Betrag, Polynome, rationale, trigonometrische, Exponentialfunktion und Logarithmus), Rechenregeln (Linearität, Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel)
- Anwendungen: 1-dim. und vektorielle Geschwindigkeit und Beschleunigung, Ableitung von Kurven, Monotonie und Krümmung, Extremwertaufgaben (notwendige und hinreichende Bedingungen), Tangentengleichung, Taylorreihenentwicklung, Grenzwertregel von Bernoulli und de L'Hospital, implizite Differentiation
- Computer: Berechnung von Sekantensteigungen \rightarrow Konvergenz, Visualisierungen von $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, der Ableitungen von Kurven, der Taylorreihenentwicklung und von Strom und Spannung im elektrischen Schwingkreis vgl. zu komplexer Wechselstromrechnung

Integralrechnung

- Motivation: Aggregation von Größen (Arbeit = Kraft über Weg = Leistung über Zeit, Fläche, Masse, Volumen)
- Stammfunktionen, Integrationskonstante, Zusammenhang mit Flächenberechnung, Riemann-Summe, Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung, uneigentliche Integrale
- Rechenregeln (Linearität, Grenzen) und Integrationsmethoden (partielle Integration, Substitution, Partialbruchzerlegung)
- Anwendungen: Flächen, Rotationsvolumen, Massen, Bogenlänge, Arbeit, Schwerpunkt, Massenträgheitsmoment, linearer und quadr. Mittelwert etc.
- Computer: Berechnung von Riemann-Summen \rightarrow Konvergenz

Differentialgleichungen

- Motivation: Dynamische Gesetze der Naturwissenschaften
- Allg. GDGL 1. Ordnung: Richtungsfeld, Lösungsschar, Anfangswertproblem, Trennung der Variablen, einfache Substitutionen
- Lineare GDGL 1. Ordnung: Bspe. mit konstante Koeffizienten, homogene und partikuläre Lösungen, Variation der Konstanten
- GDGL 2. Ordnung: Newtons 2. Gesetz, Schwingungsgleichung mit Ansatz $e^{\lambda t}$
- Anwendungen: radioaktiver Zerfall, verschiedene elektrische Schaltkreise, Newtons Abkühlgesetz, Freier Fall mit Luftwiderstand, Mischungen, Elektrobatterie, Newtons 2. Gesetz, Schwingungen etc.
- Computer: Verwendung von einfachen numerische Lösungsverfahren (Euler, Heun) und odeint

Scientific Computing

- [Python](#) in [Thonny](#) mit [NumPy](#), [Matplotlib](#) und [SciPy](#)
- Zweck: Implementierung und Visualisierung ausgewählter Inhalte am Computer
- nicht prüfungsrelevant im 1. Semester

Empfohlene Fachliteratur und weiterführende Literatur

Einige der folgenden Bücher [[Pap18](#); [Pap15](#); [Pap19](#); [Pap20](#); [Pap09](#); [Gol+18](#); [Far06](#); [BC14](#); [Die14](#); [Fur95c](#); [Fur95a](#); [Fur95b](#); [Kem19](#); [Göl+17](#); [SS13](#); [MW85](#); [MW98a](#); [MW98b](#); [BV18](#); [TT13](#); [TT14](#); [LL20](#); [Kof21](#)] sind in der [Bibliothek der FH Vorarlberg](#) in Printversion und oder als pdf-Download erhältlich.

- Papula, Lothar (2018): Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1: Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium. 15. Auflage, Springer.
- Papula, Lothar (2015): Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2: Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium. 14. Auflage, Springer.
- Papula, Lothar (2019): Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler - Anwendungsbeispiele: 222 Aufgabenstellungen mit ausführlichen Lösungen. 8. Auflage, Springer.
- Papula, Lothar (2020): Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler - Klausur- und Übungsaufgaben: 711 Aufgaben mit ausführlichen Lösungen zum Selbststudium und zur Prüfungsvorbereitung. 6. Auflage, Springer.
- Papula, Lothar (2009): Mathematische Formelsammlung: Für Ingenieure Und Naturwissenschaftler. 10. Aufl. 2009. Vieweg+Teubner Verlag.
- Goldstein, Larry J. u.a. (2018): Calculus & Its Applications. 14., Global Edition, Pearson Education Limited.
- Farlow, Stanley J. (2006): An Introduction to Differential Equations and Their Applications. 1. Auflage, Dover Publications.
- Bronson, Richard and Costa, Gabriel (2014): Schaum's Outline of Differential Equations (Schaum's Outlines). 4. Auflage. Mcgraw-Hill Education Ltd.
- Dietmaier, Christopher (2014): Mathematik für angewandte Wissenschaften. Springer.
- Hartmann, Peter (2020): Mathematik für Informatiker: Ein praxisbezogenes Lehrbuch. 7. Auflage, Springer.
- Furlan, Peter (1995a): Das gelbe Rechenbuch. Band 1. Dortmund: Verlag Martina Furlan.
- Furlan, Peter (1995b): Das gelbe Rechenbuch, Band 2. Dortmund: Verlag Martina Furlan.
- Furlan, Peter (1995c): Das gelbe Rechenbuch, Band 3. Dortmund: Verlag Martina Furlan.
- Kemnitz, Arnfried (2019): Mathematik zum Studienbeginn: Grundlagenwissen für alle technischen, mathematisch-naturwissenschaftlichen und wirtschaftswissenschaftlichen Studiengänge. 12. Auflage, Springer.
- Göllmann, Laurenz u.a. (2017): Mathematik für Ingenieure: Verstehen – Rechnen – Anwenden: Band 1: Vorkurs, Analysis in einer Variablen, Lineare Algebra, Statistik. 1. Auflage, Springer.
- Stry, Yvonne; Schwenkert, Rainer (2013): Mathematik kompakt: für Ingenieure und Informatiker. 4., neu bearb. und erw. Aufl. Berlin Heidelberg: Springer.
- Marsden, Jerrold E. and Weinstein, Alan (1985): Calculus I, II, and III. Second Edition, Springer, [Online Version](#).
- Boyd, Stephen and Vandenberghe, Lieven (2018): Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares. Cambridge University Press. [Online Version](#).
- Teschl, Gerald; Teschl, Susanne (2013): Mathematik für Informatiker: Band 1: Diskrete Mathematik und Lineare Algebra. 4., überarb. Aufl. 2013 Edition. Berlin: Springer Spektrum.
- Teschl, Gerald; Teschl, Susanne (2014): Mathematik für Informatiker: Band 2: Analysis und Statistik. 3., überarb. Aufl. 2014 Edition. Berlin Heidelberg: Springer Vieweg.
- Linge, Svein; Langtangen, Hans Petter (2019): Programming for Computations - Python: A Gentle Introduction to Numerical Simulations with Python 3.6. 2. Auflage. Springer.
- Kofler, Michael (2021): Python: Der Grundkurs. 2. Auflage Bonn: Rheinwerk Computing.

1 Grundkonzepte

1.1 Methoden

1.1.1 Mengenlehre

Peter: Was hast Du in der Mathematik als erstes gelernt?

Klaus: Eine Menge!

💡 Motivation

Die Mengenlehre bildet die Basis der Mathematik! Alle mathematischen Objekte, die wir in der Wissenschaft und Technik brauchen, wie z. B. Funktionen, Vektoren und Gleichungen, bauen auf der Mengenlehre auf. Sie ist sehr anschaulich und auch außerhalb der Mathematik ein hilfreiches Instrument zur Strukturierung unserer Gedanken. Wir wiederholen hier nur die für uns wichtigsten Bereiche der Mengenlehre, insbesondere oft verwendete Notation (=Schreibweise).

Eine **Menge** ist eine Zusammenstellung verschiedener Elemente und wird typischerweise mit einem Großbuchstaben bezeichnet. So ist z. B. die Menge $A = \{1, \text{Haus}, 2\}$ die Menge der Zahlen 1, 2 und des Wortes "Haus". Die Notation $2 \in A$ bedeutet "2 ist Element der Menge A", die Notation $3 \notin A$ bedeutet "2 ist nicht Element der Menge A".

- Zwei Mengen sind gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten.
- In einer Menge ist keine Reihenfolge der Elemente definiert, d. h. $\{\text{Haus}, 1, 2\} = \{1, \text{Haus}, 2\}$.
- In einer Menge kann ein einzelnes Element nur einmal vorkommen, d. h. die Notation $\{42, 42, 42\}$ macht keinen Sinn.
- Die sogenannte leere Menge $\{\}$ enthält kein Element.

Wenn jedes Element einer Menge A auch in der Menge B enthalten ist, sagt man "A ist Teilmenge von B" und schreibt $A \subseteq B$. Wenn zudem B mehr Elemente als A enthält, sagt man "A ist echte Teilmenge von B" und schreibt $A \subset B$. Mengen werden gerne als **Venn-Diagramme** grafisch dargestellt, z. B. für $A \subseteq B$ in Abbildung 1.1:

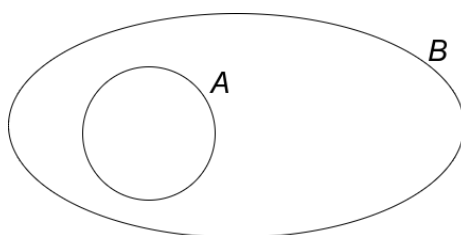


Abbildung 1.1: Venn-Diagramm

In der Technik sind die folgenden **Zahlenmengen** sehr wichtig:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen (positive ganze Zahlen, ohne die Null).
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen (nichtnegative ganze Zahlen, inklusive der Null).
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ bezeichnet die Menge der ganzen Zahlen.
- \mathbb{Q} bezeichnet die Menge der rationalen Zahlen, d. h. Bruchzahlen.
- \mathbb{R} bezeichnet die Menge der reellen Zahlen. Zu diesen gehören neben den rationalen Zahlen auch die irrationalen Zahlen wie $\pi = 3,1415\dots$ und die Eulersche Zahl $e = 2,7182\dots$. Die Menge der reellen Zahlen wird geometrisch durch einen **Zahlenstrahl** dargestellt.

Es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Jede Erweiterung von einer kleinen auf eine größere Zahlenmenge macht das Beschreiben und Lösen von gewissen Problemen einfacher. Ein Beispiel: Die Diagonale des Einheitsquadrats hat die Länge $\sqrt{2}$. Die Zahl $\sqrt{2}$ ist keine Bruchzahl, also nicht in \mathbb{Q} . Man braucht die reellen Zahlen, um alle Diagonalen beschreiben und mit ihnen rechnen zu können.

i Hinweis

Im Kapitel **Komplexe Zahlen** werden wir diese Folge von wachsenden Zahlenmengen weiterführen.

Intervalle sind zusammenhängende Bereiche des Zahlenstrahls, z. B.:

- $[-\pi, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid -\pi \leq x \leq 3\}$
- $[-5, -7) = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 \leq x < -5\}$
- $(10, 12) = \{x \in \mathbb{R} \mid 10 < x < 12\}$
- $(0, 100] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 100\}$

Das Symbol $|$ liest man dabei als “für die gilt”.

Mengenoperationen:

- Das **kartesische Produkt** von zwei Mengen A und B ist definiert als die Menge $A \times B := \{(a, b) \mid A \in A, b \in B\}$. Dabei ist (a, b) ein **Tupel** (geordnete Liste, englisch *array*) aus den Elementen a und b , und das Definitionszeichen $:=$ liest sich als “ist definiert als”. Das kartesische Produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ wird kurz als \mathbb{R}^2 geschrieben und ist die Menge der kartesischen Koordinaten von Punkten in der **Ebene**. Das kartesische Produkt von mehr als zwei Mengen ist analog definiert, z. B. ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ die Menge der kartesischen Koordinaten von Punkten im **Raum** und wird kurz als \mathbb{R}^3 geschrieben. Das n -fache ($n \in \mathbb{N}$) kartesische Produkt von \mathbb{R} mit sich selbst wird als \mathbb{R}^n geschrieben.
- Vereinigung: $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$, wobei \vee das logische nicht-ausschließende “oder” bezeichnet.
- Durchschnitt: $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$, wobei \wedge das logische “und” bezeichnet.
- Komplement: $A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$, in Worten “ A ohne B ”.

Indizieren und Summenzeichen:

Wenn man mehrere mathematische Objekte (z. B. Zahlen, Vektoren, Funktionen) beschreiben möchte, führt man oft eine Indizierung der Objekte ein, d. h. jedes Objekt bekommt einen Index, mit dem es eindeutig angesprochen werden kann. Der Index ist typischerweise eine laufende Nummer $i \in I \subseteq \mathbb{N}$ aus einer Indexmenge, die hier I heißt.

Beispiel: Die erreichten Prozentpunkte in der Mathematikprüfung von 25 Studierenden werden als $p_i \in [0, 100]$ mit Index $i \in I = \{1, 2, 3, \dots, 24, 25\}$ geschrieben. Das arithmetische Mittel dieser Folge von Prozentpunkten kann man mit dem Summenzeichen als $\frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} p_i$ oder auch als $\frac{1}{25} \sum_{i \in I} p_i$ geschrieben werden.

1.1.2 Aussagen und Beweistechniken

Motivation

In der Schule hat Mathematik vor allem **Rechnen** (nach bestimmten Mustern) bedeutet wie z. B. Zahlen von Hand multiplizieren, Terme umformen, Gleichungen lösen, Ableitungen und Integrale berechnen. Auf der (Fach-)Hochschule beschäftigen wir uns auch damit, warum und wann man bestimmte mathematische **Aussagen** treffen kann. Man beschäftigt sich also auch mit Fragen wie den folgenden:

- Unter welchen Voraussetzungen sind welche Rechnungen wohldefiniert und zielführend?
- Welche Folgerungen sind unter welchen Annahmen gerechtfertigt und welche nicht?
- Wie kann man beweisen oder widerlegen, ob eine Folgerung wahr ist und ob ihre Umkehrung wahr oder falsch ist?

In der Mathematik will man also **eindeutige und beweisbare Aussagen** machen, die unter klar definierten Voraussetzungen gelten. So weiß man mit Sicherheit, was man behaupten und folgern kann und was nicht, und muss sich nicht streiten.

Beispiele:

- Wenn das Produkt von zwei Zahlen Null ist, dann ist mindestens eine der zwei Zahlen Null. Die Umkehrung ist auch wahr, d. h., wenn eine von zwei Zahlen Null ist, dann ist ihr Produkt Null.
- Bei der quantitativen Beschreibung von Zuständen und Vorgängen in der Natur, Technik, Wirtschaft etc. erstellt man ein Modell, das auf plausiblen **Annahmen** und vertrauenswürdigen Messdaten beruht. Zum Beispiel modelliert man den Energieverbrauch eines Fahrzeugs pro Kilometer in Abhängigkeit seiner Geschwindigkeit als Funktion $f(v)$. Ausgehend von der Modellierung kann man die Mathematik verwenden und mittels passender Berechnungen und logischer Schlussfolgerungen bestimmte Problemstellungen lösen. Im Beispiel des Fahrzeugs könnte die Problemstellung lauten: "Bei welcher Geschwindigkeit v_0 ist der Energieverbrauch pro Kilometer minimal?" Mit den Methoden der Differentialrechnung lässt sich dieses Problem lösen: Aus $f'(v_0) = 0$ und $f''(v_0) > 0$ **folgt**, dass der Energieverbrauch pro Kilometer bei der Geschwindigkeit v_0 lokal minimal ist.

Eine (mathematische) Aussage ist eine Behauptung, die einen Sachverhalt beschreibt und entweder wahr oder falsch ist.

Beispiele für Aussagen:

- Wien ist die Hauptstadt von Österreich. (wahre Aussage)
- $3 + 4 = 100$ (falsche Aussage)
- Es gibt keine größte natürliche Zahl. (wahre Aussage)
- Die Gleichung $x^2 = 2$ hat in \mathbb{Q} keine Lösung und in \mathbb{R} genau eine Lösung, nämlich die irrationale Zahl $\sqrt{2}$. (wahre Aussage)
- $4 \in \{1, 2, 3\}$ (falsche Aussage)

Keine Aussagen sind:

- Mein Fußballverein hat in der näheren Vergangenheit schlecht gespielt.
- $\sin(3 + x)$
- Rechnen Sie alle Aufgaben!

Die Verneinung einer Aussage A wird als $\neg A$ geschrieben genau dann wahr, wenn A falsch ist. Aussagen können z. B. mit den Operatoren \vee und \wedge zu neuen Aussagen verknüpft werden. Eine sehr wichtige Verknüpfung für die Mathematik ist die **Implikation**, d. h. die (Schluss-)Folgerung einer Aussage B aus einer Aussage A , die mit dem Implikationspfeil als $A \implies B$ dargestellt wird. Hier ein paar “Übersetzungen” von $A \implies B$:

- aus A folgt B
- wenn A dann B
- A impliziert B
- B ist notwendige Bedingung für A
- A ist hinreichende Bedingung für B

Achtung: Die Implikation $A \implies B$ ist nur dann falsch, wenn A wahr und B falsch ist. Daher werden wir im Folgenden immer A als wahr annehmen. Das bedeutet wir nehmen an, dass die Aussage A gilt, und überprüfen, ob man daraus folgern kann, dass B auch gilt.

Beispiel: Sei A die Aussage “Die reelle Zahl x liegt im Intervall $[-2, 2]$.”, und sei B die Aussage “Das Quadrat der reellen Zahl x liegt im Intervall $[0, 5]$.” Die Implikation $A \implies B$ ist wahr. Achtung, die umgekehrte Implikation $B \implies A$ ist falsch! Wir können in Abbildung 1.1 der Aussage A die Menge A all jener x , die A erfüllen, und der Aussage B die Menge B all jener x , die B erfüllen, zuordnen, und so die Implikation mengentheoretisch veranschaulichen. $A \implies B$ entspricht dann der Aussage $A \subseteq B$.

Der Beweis einer Implikation $A \implies B$ wird oft durch einen Kettenschluss $A \implies A_1 \implies A_2 \implies \dots \implies B$ geführt. Im vorherigen Beispiel könnte dieser so aussehen: $x \in [-2, 2] \implies x^2 \in [0, 4] \implies x^2 \in [0, 5]$.

Wenn sowohl $A \implies B$ und $B \implies A$ gelten, also wahr sind, dann sind die beiden Aussagen A und B **äquivalent**, und man schreibt $A \iff B$. In Worten: A gilt genau dann, wenn B gilt.

Beispiele:

- Äquivalenzumformung einer Gleichung: $3x = 12 \iff x = 4$
- Das Produkt von zwei Zahlen ist Null. \iff Mindestens eine der zwei Zahlen ist Null.
- $(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A)$: Überprüfe diese Äquivalenz z. B. an den Aussagen $A =$ “Es regnet.” und $B =$ “Die Straße ist naß.”
- $v = 3$ ist nicht äquivalent zu $v^2 = 3^2$, d. h. Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung! Es gelten nur folgende Implikationen: $v = 3 \implies v^2 = 3^2 = 9 \implies v = \pm 3$.

Um zu beweisen, dass eine Aussage wahr oder falsch ist, kann man unter anderem folgende **Beweistechniken** verwenden:

- direkter Beweis: Man geht von einer bereits bewiesenen Aussage oder einer als wahr angenommenen Aussage aus und leitet, durch logische Schlussfolgerung, daraus die zu beweisende Aussage ab, wie z. B. beim Kettenschluss des obigen Beispiels.
- Gegenbeispiel: Um eine Aussage vom Typ “ $\forall x \in M$ gilt *blabla*.” zu widerlegen, genügt es, ein $x_0 \in M$ zu finden, für das *blabla* nicht gilt. Das Symbol \forall liest sich dabei als “für alle”.
- indirekter Beweis: Es wird angenommen, die zu beweisende Aussage sei falsch. Unter Benutzung bekannter, wahrer Aussagen und logischer Schlussfolgerung wird daraus ein Widerspruch gefolgert. Also muss die ursprüngliche Aussage wahr sein. Vergleiche $(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A)$.

Hinweis

Das Gleichheitszeichen wird in der Mathematik für an sich unterschiedliche Zwecke verwendet:

- **Rechnungen** wie z. B. $3 + 7 = 10$, $x^2 + x = x(x + 1)$
- **Problemstellungen:** $x^2 = 25$, genauer und in Worten: Welche Zahlen $x \in \mathbb{R}$ erfüllen die Gleichung $x^2 = 25$?
- **Definitionen** (Benennungen) von Objekten: Oft schreibt man z. B. $L = \{x \in \mathbb{R} | x^2 = 25\}$, um damit die rechts vom “=” beschriebene Menge mit dem Symbol L zu benennen. Um dies zu betonen, verwendet man das Definitionszeichen $L := \{x \in \mathbb{R} | x^2 = 25\}$ oder schreibt “Sei $L = \{x \in \mathbb{R} | x^2 = 25\}$ ”. Oft verwendet man aber einfach nur das Gleichheitszeichen.

1.1.3 Funktionen

Motivation

In diesem Abschnitt gehen wir von allgemeinen Aussagen über zu Aussagen über die Werte von Größen und ihre Abhängigkeiten. Für diese nicht nur in der Technik sehr wichtige Aufgabe verwendet man Funktionen, die auch Abbildungen, Operationen und Transformationen genannt werden. Sie beschreiben, wie eine (später mehrere) Größe von einer (später mehrere) anderen Größe abhängt. Beispiele: Kinetische Energie als Funktion der Geschwindigkeit, Energieverbrauch eines Fahrzeugs als Funktion seiner Geschwindigkeit, Preis eines Gutes als Funktion der Einkaufsmenge, elektrischer Spannungsverlauf als Funktion der Zeit. Funktionen dienen also zur **Beschreibung von Zusammenhängen** vom Typ “Wenn diese Größe diesen Wert hat, dann hat diese andere Größe diesen Wert.”. Wenn der Zusammenhang quantitativer Natur ist, werden den numerischen Werten der Wenn-Größe numerische Werte der Dann-Größe zugeordnet.

Hier die formale Definition einer reellen (weil reelle Zahlen als numerische Werte verwendet werden) Funktion. Eine **reelle Funktion** ist eine Vorschrift, z. B. f genannt, die jedem Element $x \in D \subseteq \mathbb{R}$ genau ein Element $y \in Z \subseteq \mathbb{R}$ zuordnet:

$$f : D \rightarrow Z \\ x \mapsto y = f(x)$$

Eine Funktion beschreibt somit viele Wenn-Dann-Aussagen zwischen Input- und Outputgröße: Die Inputgröße hat den Wert x . \implies Die Outputgröße hat den Wert $f(x)$.

Nomenklatur:

- f ist der Name der Funktion
- D ist die Definitionsmenge, der Definitionsbereich
- Z ist die Zielmenge
- x ist das Argument, die Stelle, die unabhängige Variable, die unabhängige Veränderliche, der Input
- y ist die abhängige Variable, die abhängige Veränderliche, der Output
- $f(x)$ ist der Funktionswert an der Stelle x , das Bild von x .
- Wie der Funktionswert aus dem Argument berechnet wird, gibt die Funktionsgleichung an, z. B. $f(x) = 3x^2 - \sin(x)$.

- Die Bildmenge $f(D)$ ist die Menge aller “getroffenen” Elemente der Zielmenge: $f(D) = \{f(x)|x \in D\}$.

Hinweise:

- Wenn es zu keinen Missverständnissen führt, wird bei der Angabe einer Funktion oft auf die explizite Angabe des Definitions- und Wertebereichs verzichtet, und man gibt nur die Funktionsgleichung oder sogar nur deren rechten Term (im obigen Beispiel $3x^2 - \sin(x)$) an.
- Of verzichtet man auf die explizite Angabe eines Funktionsnamens wie in $y = f(x) = \dots$ und schreibt nur $y(x) = \dots$.
- Die Variable x in der Funktionsgleichung $f(x) = 3x^2 - \sin(x)$ kann problemlos umbenannt werden. Die Funktionsgleichung $f(a) = 3a^2 - \sin(a)$ repräsentiert die gleiche Vorschrift. Man sagt x und a sind in dieser Situation sogenannte Dummy-Variablen.
- Achtung: Neben den hier verwendeten Begriffen, gibt es einige andere, die dasselbe bezeichnen, siehe z. B. [Wikipedia: Funktion \(Mathematik\)](#).

1.1.3.1 Darstellungen

Venn-Diagramme stellen die Funktionszuordnung mengentheoretisch dar, siehe Abbildung 1.2.

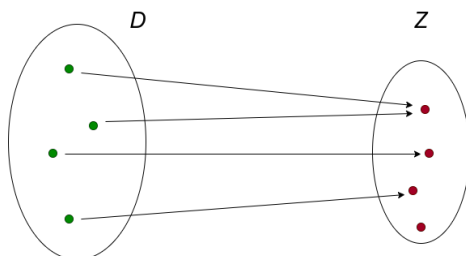


Abbildung 1.2: Venn-Diagramm einer Funktion

Eine **Wertetabelle** einer reellen Funktionen gibt in einer Tabelle eine Auswahl an Wertepaaren $x \in D$ und $f(x) \in Z$ an. Im folgenden **Python**-Code generieren wir eine Wertetabelle der Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Dabei wird zuerst das Python-Paket **NumPy** geladen. Anschließend wird die Funktion definiert. Schließlich wird die Funktion in einer for-Schleife an den Stellen des Arrays $[-2, -1, 0, 1, 2]$ ausgewertet und formatiert ausgegeben.

```
# import package:
import numpy as np

# define function:
def f(x):
    return 1/(1 + x**2)

# array of 5 grid points distributed between -2 and 2 with equal spacing:
x_values = np.linspace(start=-2, stop=2, num=5)

# print x and f(x) values:
print("x | f(x)")
print("-----")
for x in x_values:
```

```
print(f"{x:2.0f} | {f(x):1.3f}")
```

```
x | f(x)
-----
-2 | 0.200
-1 | 0.500
 0 | 1.000
 1 | 0.500
 2 | 0.200
```

! Hinweis

Im Kapitel [Scientific Computing](#) finden Sie:

- eine Anleitung zur Installation von Python und Python-Paketen auf Ihrem Computer
- eine kurze Einführung in jene ersten, überschaubaren Python-Kenntnisse, die wir in dieser Lehrveranstaltung verwenden.

In dieser Lehrveranstaltung verwenden wir den Computer nur einführend, vereinzelt und unterstützend für Visualisierungen, Überprüfungen von Handrechnungen und Berechnungen, die von Hand zu aufwendig wären. Dieses ersten Scientific Computing Kompetenzen sind für diese Lehrveranstaltung nicht prüfungsrelevant, sie werden in den anschließenden Semestern aber vertieft und sind ab dem zweiten Semester prüfungsrelevant.

Der **Graph** einer reellen Funktion zeichnet die Paare $(x, f(x))$ für alle $x \in D$ als Punkte in ein Koordinatensystem ein. Für die Abbildung 1.3 wurden 50 Stellen verwendet, die zwischen -2 und 2 mit gleichem Abstand verteilt sind. Zur grafischen Darstellung wurde das Python-Paket [Matplotlib](#) verwendet.

```
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(-2, 2, num=50)

plt.figure(figsize=(4, 3))
plt.plot(x, f(x), linestyle='-', color='red', marker='.')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('f(x)')
plt.grid(True)
plt.show()
```

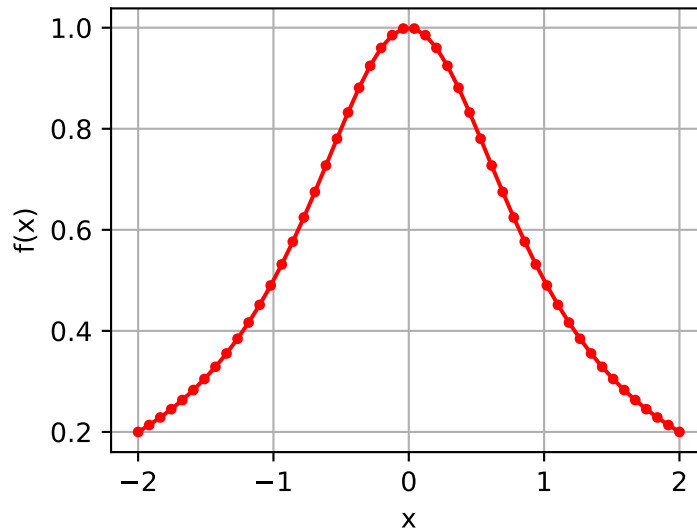


Abbildung 1.3: Graph einer Funktion

1.1.3.2 Umkehrfunktionen

Um die Ein- oder Mehrdeutigkeit und Umkehrbarkeit einer Funktion zu beschreiben, werden folgende Begriffe verwendet:

- Eine Funktion f ist **injektiv**, wenn ungleichen Inputs ungleiche Outputs zugeordnet werden: $a \neq b \implies f(a) \neq f(b)$. Dann gilt für die Gleichung $f(x) = y$, in der $y \in Z$ gegeben und $x \in D$ gesucht ist, dass eine Lösung, falls existent, eindeutig ist.
- Eine Funktion f ist **surjektiv**, wenn jedes Element $y \in Z$ der Funktionswert mindestens eines $x \in D$ ist. Dann gibt es zu jedem $y \in Z$ eine oder mehrere Lösung/en der Gleichung $f(x) = y$.
- Eine Funktion f ist **bijektiv**, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist. Dann ist die Gleichung $f(x) = y$ für jedes $y \in Z$ eindeutig lösbar.

Eine bijektive Funktion f ist also umkehrbar. Die **Umkehrfunktion**, auch **inverse Funktion** genannt, wird mit f^{-1} bezeichnet:

$$f^{-1} : Z \rightarrow D$$

$$y \mapsto x = f^{-1}(y)$$

Zur Bestimmung der Umkehrfunktion löst man die Funktionsgleichung $y = f(x)$ nach x auf und erhält dadurch die Funktionsgleichung $x = f^{-1}(y)$ der Umkehrfunktion f^{-1} . Achtung: Oft wird statt $f^{-1}(y) = \dots$ wieder x als Argument verwendet und $f^{-1}(x) = \dots$ geschrieben. Das ist problemlos, da das Argument einer Funktionsgleichung eine Dummy-Variable ist. Der Graph mit Punkten $(x, f(x))$ einer umkehrbaren Funktion f und der Graph mit Punkten $(x, f^{-1}(x))$ ihrer Umkehrfunktion f^{-1} spiegeln sich an der 1. Mediane. In [Abbildung 1.4](#) ist die Quadratfunktion $f(x) = x^2$ und ihre Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ dargestellt:

```
def f(x):
    return x**2

def f_inv(x):
    return np.sqrt(x)
```

```

plt.figure(figsize=(4, 3))
x = np.linspace(0, 3, num=100)
plt.plot(x, f(x), label="$f(x) = x^2$")
x = np.linspace(0, 9, num=100)
plt.plot(x, f_inv(x), label="$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$")
plt.plot(x, x, '--k', label='1. Mediane')
plt.xlabel('$x$')
plt.ylabel('$y$')
plt.legend()
plt.grid(True)

```

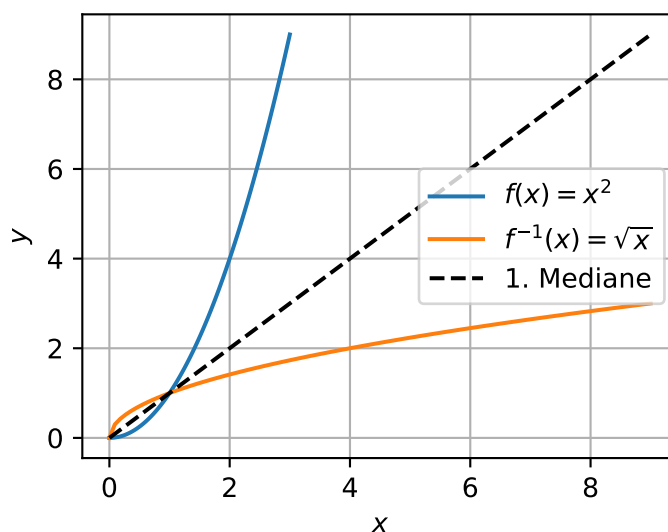


Abbildung 1.4: Funktion und Umkehrfunktion

1.1.3.3 Eigenschaften

Monotonie: Eine Funktion $f : D \rightarrow Z$ heißt in einem Intervall $I \subseteq D$

- monoton steigend, wenn $a < b \implies f(a) \leq f(b)$ für alle $a, b \in I$ gilt.
- streng monoton steigend, wenn $a < b \implies f(a) < f(b)$ für alle $a, b \in I$ gilt.
- monoton fallend, wenn $a < b \implies f(a) \geq f(b)$ für alle $a, b \in I$ gilt.
- streng monoton fallend, wenn $a < b \implies f(a) > f(b)$ für alle $a, b \in I$ gilt.

Beispiel: $f(x) = x^2$ ist im Intervall $(-\infty, 0]$ streng monoton fallend und im Intervall $[0, \infty)$ streng monoton steigend.

Folgerung: Eine im ganzen Definitionsbereich streng monotone (steigend oder fallend) Funktion lässt sich umkehren.

Periodizität: Ist f eine auf \mathbb{R} definierte Funktion, d. h. $f : \mathbb{R} \rightarrow Z$, und gilt für eine Konstante $p > 0$, dass

$$f(x + p) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, dann heißt f periodisch mit der Periode p . Auch $2p, 3p, \dots$ sind dann Perioden.

Beispiel: Die kleinste Periode von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ ist 2π .

Folgerung: Die Funktionswerte müssen nur über eine Periode berechnet werden.

Symmetrie: Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow Z$ heißt

- gerade, wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
- ungerade, wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Beispiele:

- gerade Funktionen: Potenzfunktionen mit geradzahigen Exponenten: $x^0 = 1$ (konstante Eins-Funktion), x^2, x^4, x^6, \dots , $\cos(x), |x|$
- ungerade Funktionen: Potenzfunktionen mit ungeradzahigen Exponenten: $x^1 = x, x^3, x^5, x^7, \dots$, $\sin(x)$

Folgerungen:

- Gerade Funktionen sind symmetrisch bzgl. der y -Achse.
- Ungerade Funktionen sind punktsymmetrisch bzgl. des Koordinatenursprungs.
- Die Funktionswerte müssen nur für $x \geq 0$ oder $x \leq 0$ berechnet werden.

Nullstellen: Eine Stelle x_0 im Definitionsbereich einer Funktion f heißt Nullstelle, wenn $f(x_0) = 0$ gilt. Nullstellen sind allgemein interessant, weil sich jede Bedingung "schnick(x) = schnack(x)" zu einer Nullstellenbedingung umformen lässt: "schnick(x) - schnack(x) = 0."

Polstellen: Eine Stelle x , an der eine Funktion nicht definiert ist und in deren Umgebung die Funktionswerte beliebig groß (positiv oder negativ) werden, bezeichnet man als Polstelle oder kürzer als Pol der Funktion. Derartige Singularitäten passieren typischerweise, wenn der Nenner einer Funktion Null wird, während der Zähler nicht Null ist. Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x-3}$ hat bei $x = 3$ eine Polstelle.

Grenzwertbegriff und Stetigkeit:

Wir betrachten die sogenannte **Sprungfunktion**, die z. B. einen Einschaltvorgang oder einen Kipp-Punkt beschreibt:

$$s: \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ 1 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

In Abbildung 1.5 erkennt man den (Einschalt-)Sprung bei $x = 0$.

```
def s(x):
    if x < 0:
        y = 0.0
    else:
        y = 1.0
    return y

plt.figure(figsize=(4, 3))
x = np.linspace(-2, -0.001, num=100)
plt.plot(x, np.vectorize(s)(x), color='red')
x = np.linspace(0, 2, num=100)
```



```
plt.plot(x, np.vectorize(s)(x), color='red')
plt.xlabel('$x$')
plt.ylabel('$y$')
plt.grid(True)
```

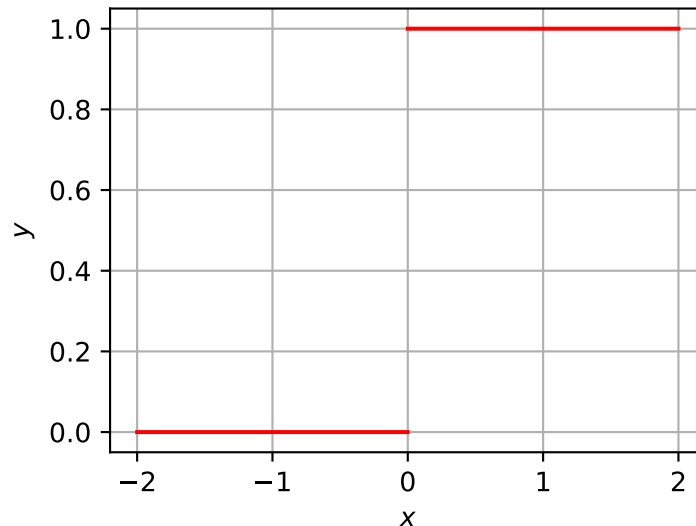


Abbildung 1.5: Sprungfunktion

Wie kann man mathematisch beschreiben, dass diese Funktion bei $x = 0$ **unstetig** ist und bei allen anderen $x \neq 0$ **stetig** ist? Dazu verwendet man z. B. den **Grenzwertbegriff** mit dem Symbol \lim für Limes (=Grenzwert): Man kann einer Stelle x auf verschiedenste Arten beliebig nahe kommen, auch ohne die Stelle zu erreichen. Zum Beispiel kann man sich der Stelle $x = 0$ mit im Betrag immer kleiner werdenden negativen Zahlen nähern: $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots$. Die zugehörigen Funktionswerte $s(-\frac{1}{2}), s(-\frac{1}{3}), s(-\frac{1}{4}), s(-\frac{1}{5}), \dots$ sind alle 0. Man sagt, dass der Grenzwert dieser x -Werte 0 ist und der Grenzwert der zugehörigen Funktionswerte 0 ist. Nähert man sich aber z. B. mit immer kleiner werdenden positiven Zahlen $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$, so sind die zugehörigen Funktionswerte $s(\frac{1}{2}), s(\frac{1}{3}), s(\frac{1}{4}), s(\frac{1}{5}), \dots$ alle 1. Der Grenzwert dieser x -Werte ist zwar weiterhin 0, aber jener der zugehörigen Funktionswerte ist nun 1. Man sagt, dass der Grenzwert der Sprungfunktion für $x \rightarrow 0$ nicht existiert, weil er nicht eindeutig ist. Der Grenzwert der Sprungfunktion für $x \rightarrow a$ für jedes $a \neq 0$ existiert allerdings und ist gleich $s(a)$. Man schreibt dies kurz als $\lim_{x \rightarrow a} s(x) = s(a)$.

Allgemein gilt folgendes für eine Funktion $f(x)$: Falls der Grenzwert von f für x gegen eine Stelle a existiert und dieser Grenzwert gleich dem Funktionswert $f(a)$ ist, dann heißt die Funktion f bei a stetig, andernfalls bei a unstetig. Ist die Funktion an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs stetig, so sagt man kurz, dass die Funktion stetig ist. Bei stetigen Funktionen haben kleine Änderungen der Input-Variablen x immer kleine Änderungen der Output-Variablen $f(x)$ zur Folge. Der Graph einer stetigen Funktion ist innerhalb ihres Definitionsbereiches eine zusammenhängende Kurve, er macht keine Sprünge und kann ohne Absetzen gezeichnet werden.

Die Sprungfunktion $s(x)$ ist zwar bei allen Stellen $x \neq 0$ stetig, aber bei $x = 0$ unstetig. Somit ist sie insgesamt unstetig.

1.1.3.4 Operationen

Funktionen werden **punktweise** addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert, genauer:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

In Abbildung 1.6 ist als Beispiel die Summe einer Parabel und einer Geraden dargestellt:

```
x = np.linspace(-2, 2, num=100)

plt.figure(figsize=(5, 3))
plt.plot(x, x**2, label='Parabel')
plt.plot(x, -0.5*x + 1, label='Gerade')
plt.plot(x, x**2 - 0.5*x + 1, linewidth=2, label='Summe')
plt.xlabel('x')
plt.legend()
plt.grid(True)
```

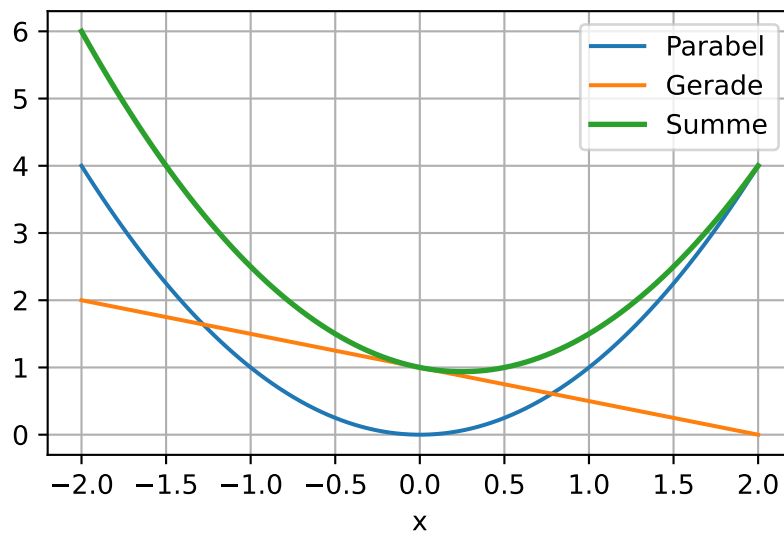


Abbildung 1.6: Summe zweier Funktionen

Geometrische Operationen am Graphen:

Ersetzt man $y = f(x)$ durch

$$y = f(x - x_0)$$

$$y = f(x) + y_0$$

$$y = -f(x)$$

so wird der zugehörige Graph

um x_0 in x -Richtung verschoben

um y_0 in y -Richtung verschoben

an der x -Achse gespiegelt

Ersetzt man $y = f(x)$ durch	so wird der zugehörige Graph
$y = f(-x)$	an der y -Achse gespiegelt
$x = f(y)$	an der 1. Mediane gespiegelt
$y = af(x)$	in y -Richtung mit Faktor $a > 0$ gestreckt
$y = f(x/a)$	in x -Richtung mit Faktor $a > 0$ gestreckt

Hintereinanderschaltung:

Der Output einer Funktion g kann als Input einer zweiten Funktion f dienen, falls die Bildmenge von g im Definitionsbereich von f liegt. Unter dieser Voraussetzung schreibt man die Hintereinanderschaltung (Komposition, Verkettung) von zuerst g und dann f als $f \circ g$, was als "f nach g" ausgesprochen wird. Ein x aus dem Definitionsbereich von g wird von $f \circ g$ auf $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ im Zielbereich von f abgebildet.

Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 1 + x^2$, $(f \circ g)(x) = \sqrt{1 + x^2}$

1.1.3.5 Elementare Funktionen

Eine (nicht-vertikale) **Gerade** ist durch die Funktionsgleichung $y = kx + d$ gegeben. Dabei ist k die Steigung und d der y -Achsenabschnitt, vgl. Abbildung 1.6.

Die **Betragsfunktion** ist definiert als

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

siehe Abbildung 1.7, und stimmt mit $\sqrt{x^2}$ überein.

```
x = np.linspace(-2, 2, num=1000)
y = np.abs(x)

plt.figure(figsize=(6, 3))
plt.plot(x, y)
plt.xlabel("x")
plt.grid(True)
```

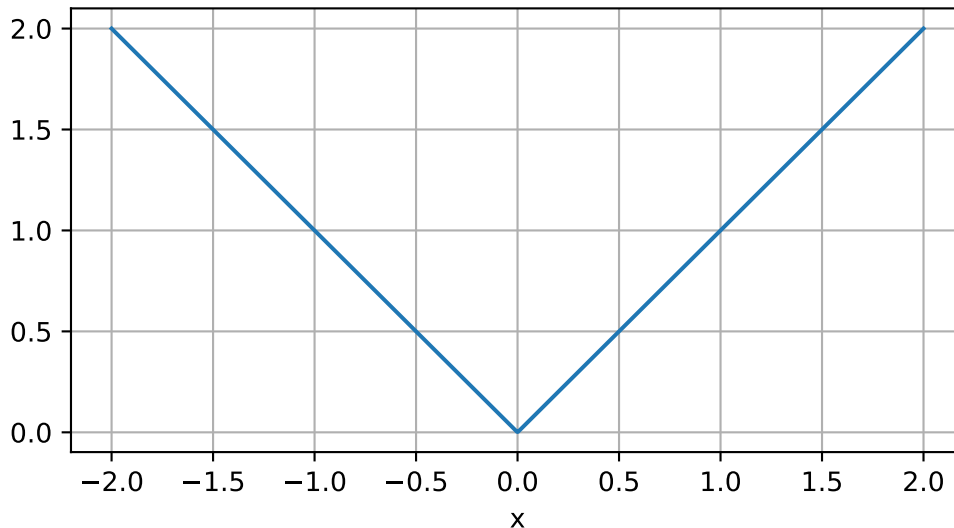


Abbildung 1.7: Betragsfunktion

Polynome sind Summen aus skalierten **Potenzfunktionen**, zum Beispiel $p(x) = -3 + 2x + 5x^2 - x^4$. Der Grad des Polynoms ist der höchste Exponent. Im vorigen Beispiel ist der Grad 4. Die allgemeine Form eines Polynoms n -ten Grades lautet

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

mit $a_n \neq 0$. Die Zahlen a_i für $i = 0, \dots, n$ sind die Koeffizienten des Polynoms. Unter den Polynomen finden sich viele bekannte Funktionen, vgl. Abbildung 1.6:

- Polynome vom Grad 0 sind konstante Funktionen, d. h. horizontale Geraden
- Polynome vom Grad 1 umfassen alle anderen, nicht-vertikale Geraden.
- Polynome vom Grad 2 sind Parabeln.

Ein Polynom n -ten Grades hat maximal n reelle Nullstellen. Dies ist für Geraden und Parabeln anschaulich. Warum sind Polynome nützlich?

- Polynome lassen sich gut interpretieren.
- Die Berechnungen der Funktionswerte benötigt nur elementare Rechenoperationen, die ein Computer gut umsetzen kann.
- Mit Polynomen lassen sich so gut wie alle anderen Funktionen beliebig genau approximieren.

In Abbildung 1.8 ist ein Polynom vierten Grades dargestellt.

```
x = np.linspace(-3, 3, num=100)
y = 2 - 3*x - 2*x**2 + 0.3*x**3 + 0.5*x**4

plt.figure(figsize=(5, 3))
plt.plot(x, y)
plt.xlabel("x")
plt.grid(True)
```

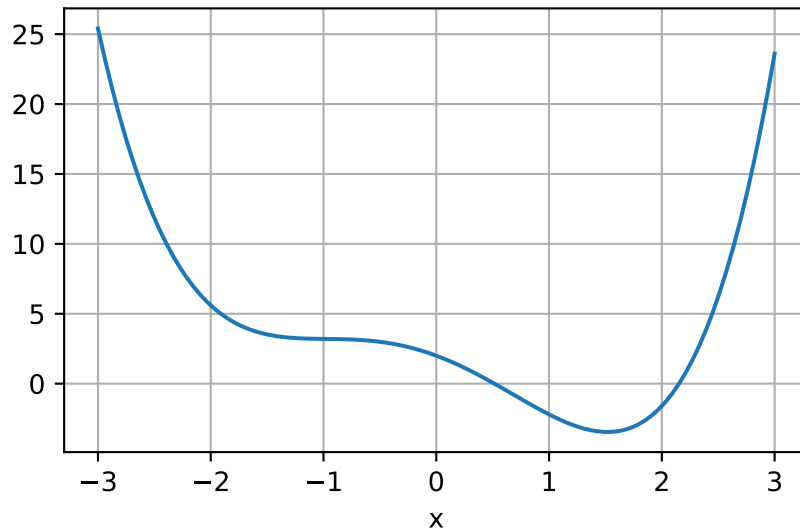


Abbildung 1.8: Polynom vierten Grades

Eine **rationale Funktion** ist eine Funktion, die als Quotient zweier Polynome darstellbar ist.

Für die geometrische Definition der **trigonometrischen Funktionen** sin (Sinus) und cos (Kosinus) verwenden wir den Einheitskreis, siehe [Abbildung 1.9](#):

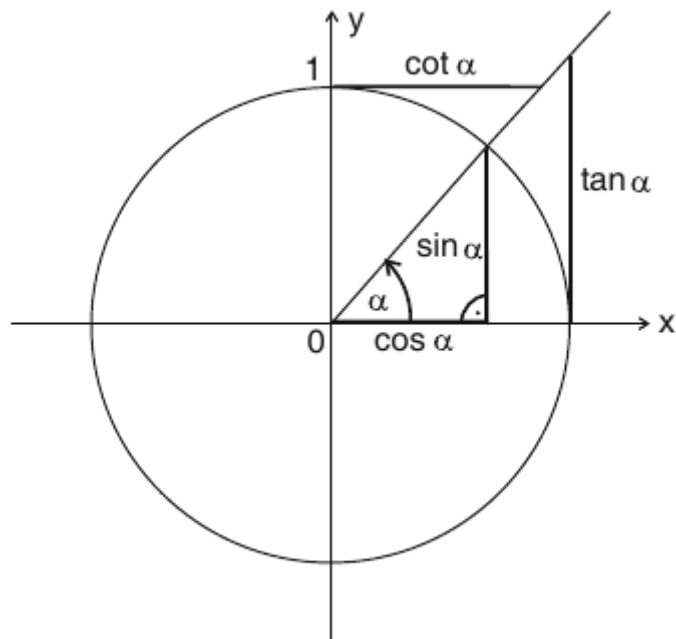


Abbildung 1.9: Einheitskreis, Quelle: [SS13]

Mit Hilfe des [Strahlensatzes](#) erkennt man, dass im ersten Quadranten ($0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$) folgende Gleichungen gelten:

chungen gelten:

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$
$$\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

Diese Gleichungen werden zur Definition der Funktionen \tan (Tangens) und \cot (Kotangens) für alle Winkel verwendet. Beachten Sie, dass \sin , \cos , \tan und \cot auch negative Werte annehmen. Ebenfalls mit Hilfe des [Strahlensatzes](#) erhält man die bekannten Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck, siehe [Abbildung 1.10](#):

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$
$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

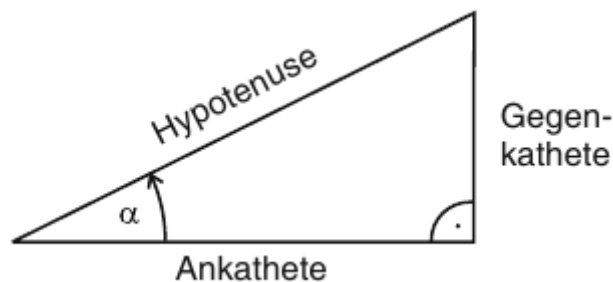


Abbildung 1.10: Rechtwinkliges Dreieck: Quelle: [\[SS13\]](#)

Der **Satz von Pythagoras** lautet

$$\text{Ankathete}^2 + \text{Gegenkathete}^2 = \text{Hypotenuse}^2$$

und liefert nach Division durch Hypotenuse^2

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1.$$

Für die vielen weiteren Eigenschaften von [trigonometrischen Funktionen](#) wird auf die Literatur verwiesen. In [Abbildung 1.11](#) sieht man, dass Sinus und Kosinus (wie auch Tangens und Kotangens) die Periode 2π haben.

```
x = np.linspace(-2*np.pi, 2*np.pi, num=100)

plt.figure(figsize=(5, 3))
plt.plot(x, np.sin(x), label='$\sin(x)$')
plt.plot(x, np.cos(x), label='$\cos(x)$')
plt.xlabel("$x$")
plt.legend()
plt.grid(True)
```

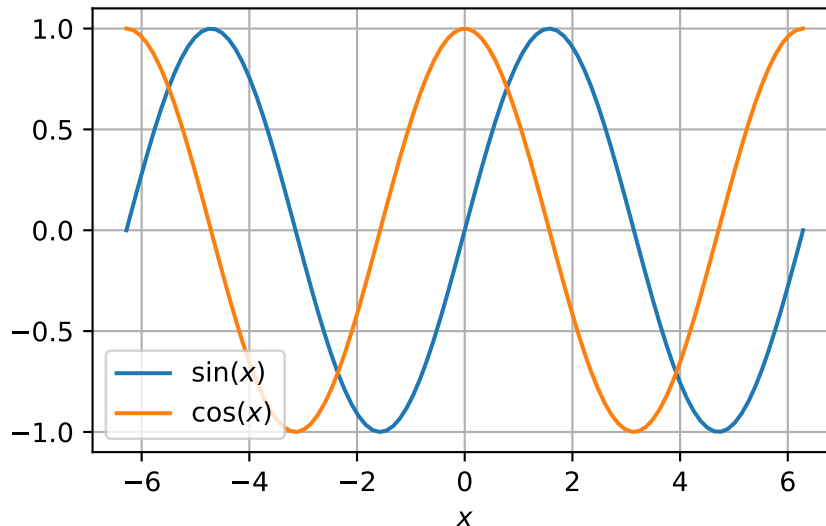


Abbildung 1.11: Sinus und Kosinus

Die Umkehrfunktionen von Sinus und Kosinus heißen [Arkussinus](#) und [Arkuskosinus](#) und über folgende Mengen definiert:

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

Eine Funktion vom Typ $f(x) = a^x$ mit $a > 0$, deren Argument im Exponenten steht, heißt **Exponentialfunktion**. Exponentialfunktionen dienen zur Beschreibung von (auch negativen) Wachstumsprozessen, bei denen die zeitliche Änderung einer Größe proportional zum aktuellen Wert der Größe ist. Beispiel sind

- Wachstum einer Population
- Verzinsung mit Zinseszinsen
- radioaktiver Zerfall
- Abkühlungsprozesse

Am gebräuchlichsten ist die **(natürliche) Exponentialfunktion** $f(x) = e^x$, kurz *e*-Funktion genannt. Dabei ist $e \simeq 2,7182818$ die Eulersche Zahl und irrational. In [Abbildung 1.12](#) sind die Graphen von e^x und e^{-x} dargestellt.

```
x = np.linspace(-2, 2, num=100)

plt.figure(figsize=(4, 3))
plt.plot(x, np.exp(x), label='$e^x$')
plt.plot(x, np.exp(-x), label='$e^{-x}$')
plt.xlabel('$x$')
plt.ylabel('$y$')
plt.legend()
plt.grid(True)
```

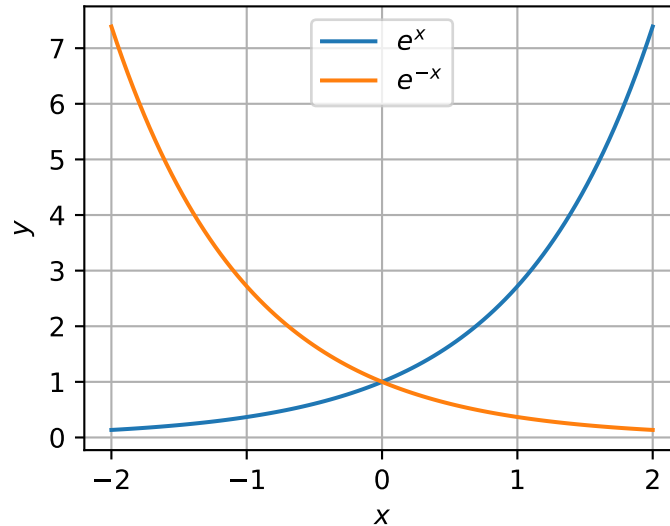


Abbildung 1.12: e^x und e^{-x}

Im Kapitel [Komplexe Zahlen](#) werden wir eine wichtige Definition von e^x mittels einer Potenzreihe kennenlernen. Die Werte e^x sind für alle $x \in \mathbb{R}$ positiv, also insbesondere nicht Null. Folgende Rechenregeln ergeben sich aus den [Potenzgesetzen](#): $e^0 = 1$, $e^a e^b = e^{a+b}$, $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$. Da die Exponentialfunktion streng monoton wachsend und ihre Bildmenge alle positiven reellen Zahlen umfasst, kann man die Gleichung $e^x = y$ für jedes $y > 0$ nach x auflösen. Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion heißt **natürlicher Logarithmus** \ln . *Achtung:* In vielen Programmiersprachen, so auch in Python, wird `log` für den natürlichen Logarithmus verwendet, siehe den Code zur [Abbildung 1.13](#).

```
plt.figure(figsize=(4, 4))
x = np.linspace(-2, 2, num=100)
plt.plot(x, np.exp(x), label="$e^x$")
x = np.linspace(0.01, 4, num=100)
plt.plot(x, np.log(x), label="$\ln(x)$")
x = np.linspace(-2, 4, num=100)
plt.plot(x, x, '--k', label='1. Mediane')
plt.xlabel('$x$')
plt.ylabel('$y$')
plt.legend(loc='upper left')
plt.grid(True)
```

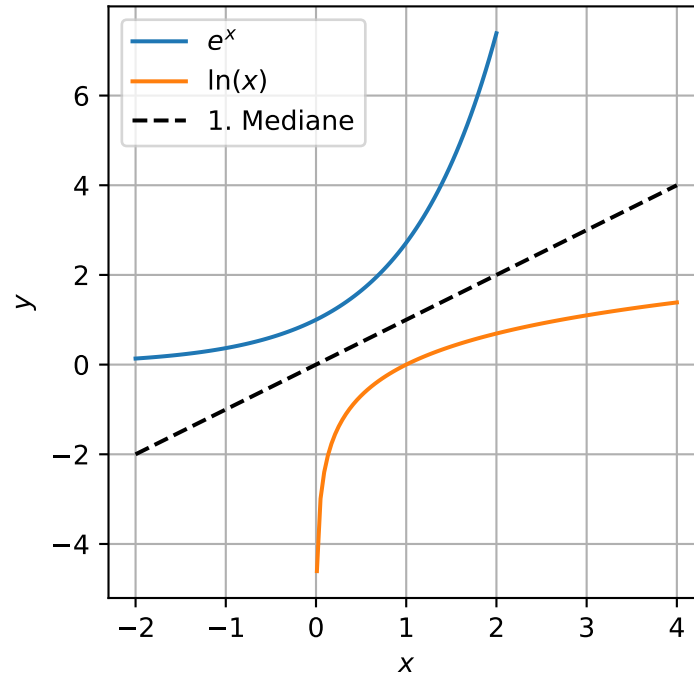



Abbildung 1.13: e^x und e^{-x}

Wichtige Eigenschaften und Rechenregeln:

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $e^{\ln(x)} = x$
- $\ln(e^x) = x$
- $a^x = [e^{\ln(a)}]^x = e^{x \ln(a)}$

Die **Hyperbelfunktionen** Sinus hyperbolicus, Kosinus hyperbolicus etc. haben ähnliche Eigenschaften wie die entsprechenden trigonometrischen Funktionen Sinus, Kosinus etc., siehe z. B. [Wikipedia](#):

$$\begin{aligned} \sinh(x) &:= \frac{e^x - e^{-x}}{2} && \text{der ungerade Anteil von } e^x \\ \cosh(x) &:= \frac{e^x + e^{-x}}{2} && \text{der gerade Anteil von } e^x \\ \tanh(x) &:= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \\ \coth(x) &:= \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \end{aligned}$$

Es gilt z. B., ähnlich zum Satz von Pythagoras, dass $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen heißen [Areafunktionen](#), siehe auch [\[Pap18\]](#) Seite 305ff.

1.2 Beispiele

1.2.1 Lösungsmenge

Wir bestimmen die Lösungsmenge der Gleichung $|x - 3| = 5x$.

$$\begin{aligned}|x - 3| &= 5x \\ \pm(x - 3) &= 5x \\ x - 3 &= \pm 5x \\ x \pm 5x &= 3\end{aligned}$$

Es gibt zwei Fälle:

1. $x + 5x = 3$ liefert die Lösung $x_1 = \frac{1}{2}$.
2. $x - 5x = 3$ liefert die Lösung $x_1 = -\frac{3}{4}$.

Die Lösungsmenge ist daher $L = \{-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\}$.

1.2.2 Falsche Rechnung

Wo ist der Fehler in der folgenden Rechnung versteckt? Welche mathematische Regel wird hier verletzt?

$$\begin{aligned}a &= b \\ a^2 &= ab \\ a^2 + (a^2 - 2ab) &= ab + (a^2 - 2ab) \\ 2(a^2 - ab) &= a^2 - ab \\ 2 &= 1\end{aligned}$$

Lösung: Aus $a = b$ folgt $a^2 - ab = 0$. In der vorletzten Gleichung wird daher durch Null dividiert, was nicht definiert ist.

1.2.3 Äquivalente Definitionen

Sie verstehen den Begriff injektiv noch nicht und machen sich auf [Wikipedia](#) schlauer. Dort steht, dass man die Injektivität einer Funktion f auf zwei Arten angeben kann, die aber äquivalent sind:

- Definition A: $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$
- Definition B: $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$

Wir beweisen, dass die beiden Definitionen äquivalent sind: Definition A ist äquivalent zu

$$\neg(f(x_1) \neq f(x_2)) \implies \neg(x_1 \neq x_2)$$

Diese Aussage ist wiederum äquivalent zu

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2,$$

was aber gerade Definition B ist.

1.2.4 Zinseszinsrechnung

Sie veranlagen Ihr Vermögen von $K_0 = 1000$ Euro mit einem fixen jährlichen Zinssatz von $p = 3\% = 0.03$.

1. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion K , die jedem $t \in \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}_0$, den Wert der Veranlagung nach t Jahren zuordnet. Warum wächst das Vermögen exponentiell?
2. Erstellen Sie einen Plot der Funktion von $t = 0$ bis $t = 30$.
3. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion von K .

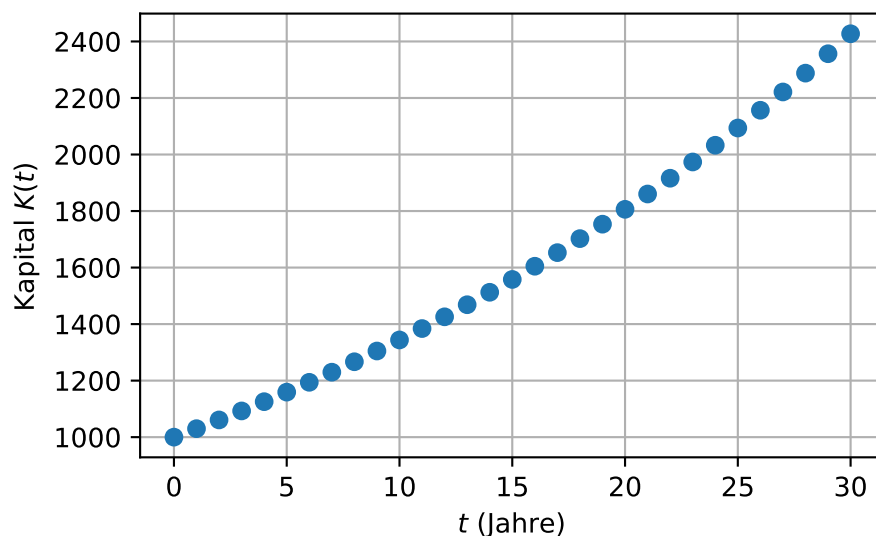
Lösung:

1. Die Funktionsgleichung $K(t) = K_0(1 + p)^t$ beschreibt exponentielles Wachstum, da das Argument t im Exponenten ist und der Faktor $(1 + p)$ größer als 1 ist.
2. Siehe Code unten
- 3.

$$\begin{aligned}K &= K_0(1 + p)^t \\ \frac{K}{K_0} &= (1 + p)^t \\ \ln(K/K_0) &= t \ln(1 + p) \\ t(K) &= \frac{\ln(K/K_0)}{\ln(1 + p)}\end{aligned}$$

```
K0 = 1000
p = 0.03
t = np.arange(0, 31)
K = K0*(1 + p)**t

plt.figure(figsize=(5, 3))
plt.plot(t, K, 'o')
plt.xlabel('$t$ (Jahre)')
plt.ylabel('Kapital $K(t)$')
plt.grid(True)
```



1.2.5 Radioaktiver Zerfall

Radioaktiver Zerfall kann durch die Funktion $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ beschrieben werden. Dabei bezeichnet $N(t)$ die Anzahl der zur Zeit t vorhandenen (d. h. noch nicht zerfallenen) Atome. N_0 ist die Anzahl der zur Zeit $t = 0$ vorhandenen Atome und $\lambda > 0$ ist die dem Material eigene Zerfallskonstante, die angibt, wie schnell oder wie langsam der Stoff zerfällt.

Radium Ra_{88}^{226} hat eine Halbwertszeit von 1580 Jahren. Nach welcher Zeit liegen von diesem radioaktiven Stoff nur noch 1 % der anfänglich vorhandenen Atome vor?

Lösung: Die Halbwertszeit hängt mit der Zerfallskonstante über $T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$ zusammen, denn:

$$\begin{aligned}\frac{N_0}{2} &= N_0 e^{-\lambda T_{1/2}} \\ \frac{1}{2} &= e^{-\lambda T_{1/2}} \\ \ln(1) - \ln(2) &= -\lambda T_{1/2} \\ -\ln(2) &= -\lambda T_{1/2} \\ T_{1/2} &= \frac{\ln(2)}{\lambda}\end{aligned}$$

Wir bezeichnen mit $T_{0.01}$ jene Zeit, nach welcher vom radioaktiven Stoff nur noch 1 % vorliegen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}N_0 e^{-\lambda T_{0.01}} &= \frac{N_0}{100} \\ e^{-\lambda T_{0.01}} &= \frac{1}{100} \\ -\lambda T_{0.01} &= -\ln(100) \\ T_{0.01} &= \frac{\ln(100)}{\lambda} = \frac{\ln(100)}{\frac{\ln(2)}{T_{1/2}}} = \frac{\ln(100)}{\ln(2)} T_{1/2} \simeq 10500 \text{ Jahre}\end{aligned}$$

1.2.6 Definitionsmenge, Nullstellen, Polstellen

Wir bestimmen für die Funktionsgleichung

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x - 7}{x^2 - 1}$$

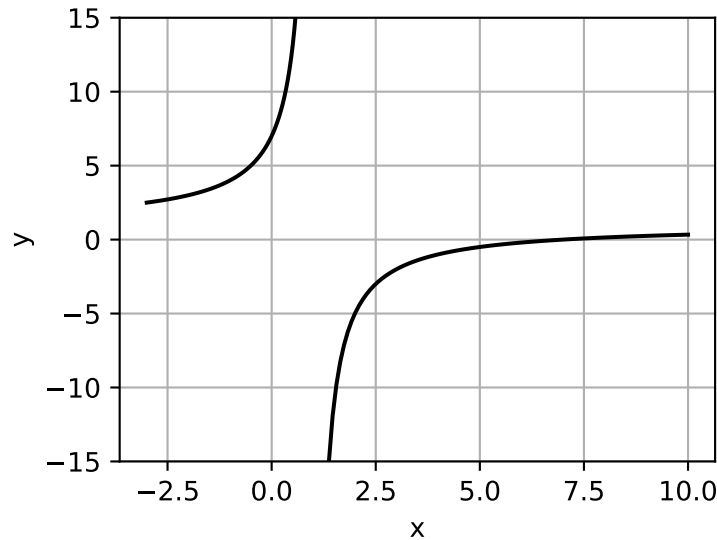
1. die größtmögliche Definitionsmenge
2. alle Nullstellen
3. alle Pole

Lösung: Der Nenner $x^2 - 1$ ist bei $x = 1$ und $x = -1$ Null. Daher ist die Funktion an diesen Stellen nicht definiert. Die größtmögliche Definitionsmenge ist daher $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$. Beachte aber, dass $x^2 - 6x - 7 = (x + 1)(x - 7)$ und $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$, sodass die Funktion bei $x = -1$ stetig fortgesetzt werden kann:

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x - 7}{x^2 - 1} = \frac{(x + 1)(x - 7)}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{x - 7}{x - 1}$$

Die größtmögliche Definitionsmenge der stetigen Fortsetzung ist $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Es gibt eine Nullstelle bei $x = 7$ und einen Pol bei $x = 1$, siehe den Graphen.

```
plt.figure(figsize=(4, 3))
x = np.linspace(-3, 1 - 0.01, num=100)
plt.plot(x, (x**2 - 6*x - 7)/(x**2 - 1), 'k')
x = np.linspace(1 + 0.01, 10, num=100)
plt.plot(x, (x**2 - 6*x - 7)/(x**2 - 1), 'k')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.ylim(-15, 15)
plt.grid()
```



1.2.7 Injektiv, Surjektiv, Bijektiv

Wir bestimmen von folgenden Funktionen, ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv sind oder keine dieser Eigenschaften haben:

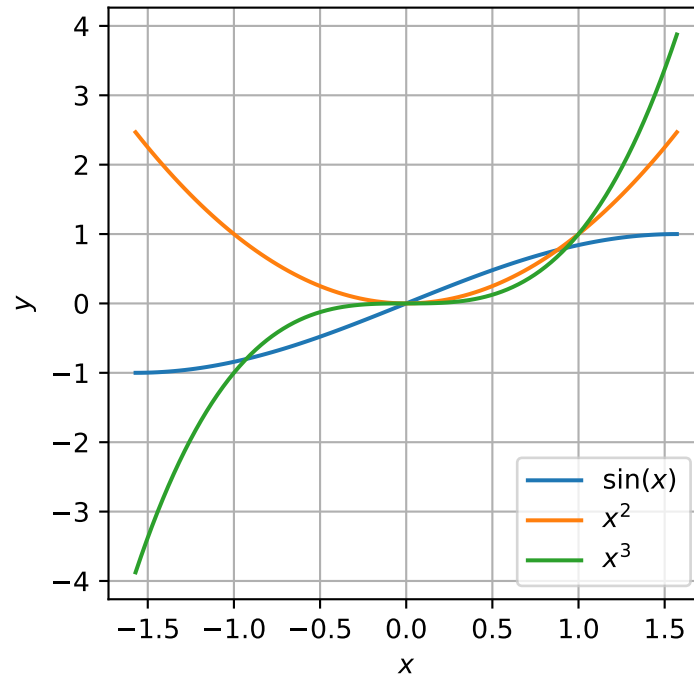
1. $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \sin(x)$
2. $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (-1, 1) : f(x) = \sin(x)$
3. $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty) : f(x) = x^2$
4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x^3$
5. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x^2$

Lösung:

Wir beurteilen die Eigenschaften der Funktionen anhand ihrer Graphen.

```
plt.figure(figsize=(4, 4))
x = np.linspace(-np.pi/2, np.pi/2, 100)
plt.plot(x, np.sin(x), label='$\sin(x)$')
plt.plot(x, x**2, label='$x^2$')
plt.plot(x, x**3, label='$x^3$')
plt.xlabel('$x$')
```

```
plt.ylabel('$y$')
plt.legend()
plt.grid(True)
```



Antworten:

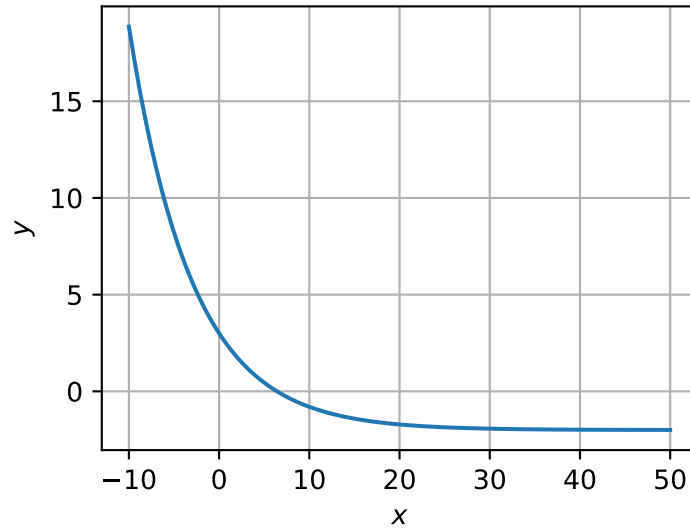
1. injektiv
2. bijektiv, Umkehrfunktion Arkussinus $\arcsin(x)$
3. surjektiv
4. bijektiv, Umkehrfunktion $\sqrt[3]{x}$
5. keine dieser Eigenschaften

1.2.8 Umkehrfunktion

Aufgabe: Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von $f(x) = 5e^{-\frac{x}{7}} - 2$ mit maximalem Definitionsbereich. Geben Sie diesen Definitionsbereich, einen passenden Zielbereich und die Funktionsgleichung an.

Lösung:

```
plt.figure(figsize=(4, 3))
x = np.linspace(-10, 50, 100)
plt.plot(x, 5*np.exp(-x/7) - 2)
plt.xlabel('$x$')
plt.ylabel('$y$')
plt.grid(True)
```



$$\begin{aligned}
 y &= 5e^{-\frac{x}{7}} - 2 \\
 y + 2 &= 5e^{-\frac{x}{7}} \\
 \frac{y + 2}{5} &= e^{-\frac{x}{7}} \\
 \ln\left(\frac{y + 2}{5}\right) &= -\frac{x}{7} \\
 x &= -7 \ln\left(\frac{y + 2}{5}\right)
 \end{aligned}$$

Die Umkehrfunktion lautet $f^{-1} : D \rightarrow Z : f^{-1}(y) = -7 \ln\left(\frac{y+2}{5}\right)$ mit maximalem Definitionsbereich $D = (-2, \infty)$ und Zielbereich $Z = \mathbb{R}$.

1.2.9 (Un-)Gerade Funktionen

Welche der folgenden Funktionen ist gerade, ungerade oder weder noch?

1. $f(x) = 4x^2 - 16$
2. $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$
3. $f(x) = \sin(x) \cos(x)$
4. $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$
5. $f(x) = \frac{1}{x-1}$

Lösungen:

1. $f(-x) = 4(-x)^2 - 16 = 4x^2 - 16 = f(x)$ also gerade
2. $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2+1} = \frac{-x^3}{x^2+1} = -f(x)$ also ungerade
3. $f(-x) = \sin(-x) \cos(-x) = -\sin(x) \cos(x) = -f(x)$ also ungerade
4. $f(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin(x) + \cos(x)$ daher weder gerade noch ungerade
5. $f(-x) = \frac{1}{-x-1}$ weder gerade noch ungerade

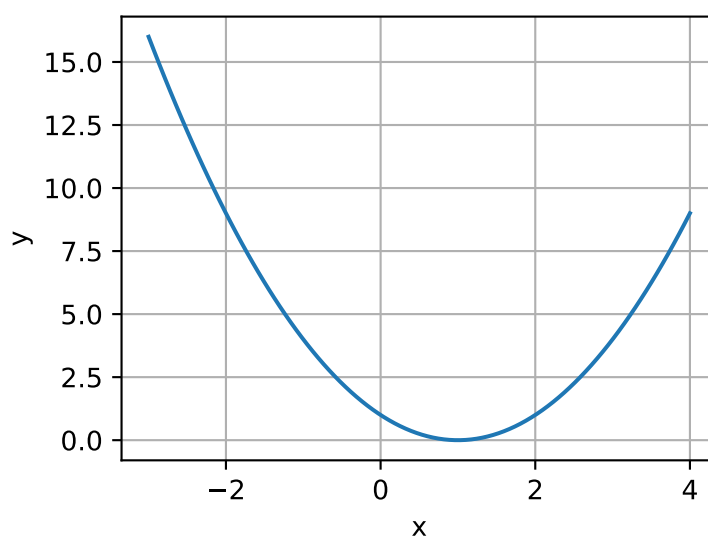
1.2.10 Monotonie

Wir untersuchen die Funktion $y = x^2 - 2x + 1$ auf Monotonie, indem wir

1. den Graphen der Funktion im Bereich $x \in [-3, 3]$ erstellen, und
2. die Bereiche für x angeben, in den die jeweilige Monotonieeigenschaft gilt.

```
x = np.linspace(-3, 4, 100)

plt.figure(figsize=(4, 3))
plt.plot(x, x**2 - 2*x + 1)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.grid(True)
```



Die Funktion $y = x^2 - 2x + 1$ ist ein Polynom 2. Grades, d. h. eine Parabel. Die Funktion ist streng monoton fallend für $x \in (-\infty, 1]$ und streng monoton wachsend für $x \in [1, \infty)$.

1.2.11 Verschieben eines Graphen

Die Funktion $f(x) = 2x^2 - 16x + 28,5$ entsteht durch Verschieben der Funktion $g(x) = 2x^2$ um a Einheiten in die x -Richtung und b Einheiten in die y -Richtung.

Wir berechnen a und b :

$$\begin{aligned} 2(x - a)^2 + b &= 2x^2 - 4ax + 2a^2 + b \\ &= 2x^2 - 16x + 28,5 \end{aligned}$$

Polynome sind gleich, wenn ihre Koeffizienten gleich sind. Daher ist $a = 4$, und aus $2a^2 + b = 28,5$ folgt $b = -3,5$. Zum Check zeichnen wir den Graph von f im Intervall $[1, 7]$ mit beiden Funktionsgleichungen.

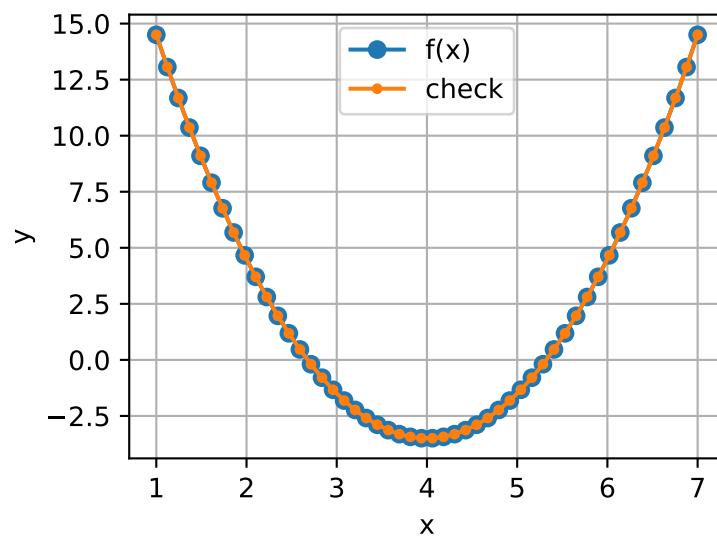

```

x = np.linspace(1, 7)
y = 2*x**2 - 16*x + 28.5

a = 4
b = -3.5
y_check = 2*(x - a)**2 + b

plt.figure(figsize=(4, 3))
plt.plot(x, y, 'o-', label="f(x)")
plt.plot(x, y_check, '-.', label="check")
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend()
plt.grid(True)

```



1.3 Aufgaben

1.3.1 Lösungsmengen

Bestimmen Sie die Lösungsmenge

1. der Gleichung $x - \sqrt{3-x} = 1$.
2. der Ungleichung $(x-1)^2 - 6 \geq 2x$.

1.3.2 Lösungsmengen

Lösen Sie die folgenden Gleichungen, d. h. bestimmen Sie ihre Lösungsmengen.

1. $x^2 - 5x + 4 = 0$

2. $x^2 - 2x + 1 = 0$
3. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$
4. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

1.3.3 Lösungsmengen

Lösen Sie folgende Gleichungen.

1. $\sqrt{x + \sqrt{2x}} = 2$
2. $\sqrt{x + 5} - \sqrt{2x + 3} = 1$

1.3.4 Falsche Rechnung

Finden Sie die Probleme in der folgenden Rechnung.

$$\begin{array}{l}
 a = -b \quad | \text{Quadrieren} \\
 a^2 = b^2 \quad | \text{„Wurzel ziehen“} \\
 a = b
 \end{array}$$

1.3.5 Beweisen

1. Beweisen Sie, dass die Aussage “Alle Primzahlen sind ungerade.” falsch ist.
2. Beweisen Sie die Aussage “Wenn das Quadrat einer natürlichen Zahl gerade ist, so ist auch die Zahl selbst gerade.”

1.3.6 Plotten von Graphen

Plotten Sie mit Python im Bereich $[0, 2\pi]$ die Graphen der Funktionen $\sin(x)$, $\cos(x)$ und $\sin(x)\cos(x)$.

1.3.7 Kondensatorspannung

Beim Aufladen eines Kondensators steigt die Kondensatorspannung u (in Volt) im Laufe der Zeit t (in Sekunden) nach dem Exponentialgesetz

$$u(t) = 100 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad t \geq 0.$$

1. Bestimmen Sie aus dem Messwert $u(2) = 80$ per Handrechnung die Zeitkonstante τ .
2. Plotten Sie mit Python den Spannungsverlauf am Kondensator.
3. Welchen Endwert u_E erreicht die am Kondensator liegende Spannung? Nach welcher Zeit wird der halbe Endwert erreicht?
4. Berechnen Sie die Kondensatorspannung zum Zeitpunkt $t = 5s$

1.3.8 Definitionsmenge, Nullstellen, Polstellen

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{e^{-x} - 2}{x + 1}.$$

Bestimmen Sie von der Funktion:

1. die größtmögliche Definitionsmenge
2. alle Nullstellen
3. alle Pole

1.3.9 Nullstellen, Polstellen

Wo besitzt die Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$ Nullstellen, wo Polstellen? Plotten Sie die Funktion mit Python.

1.3.10 Nullstellen, Polstellen

Bestimmen Sie die Nullstellen und Pole der Funktion

$$f(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)e^{-x}}{(x + 1)(x^2 - 25)}.$$

1.3.11 Definitionsmenge, Bildmenge, Graph

Bestimmen Sie die größtmögliche Definitionsmenge und die zugehörige Bildmenge zur Funktionsgleichung $y = \sqrt{2x + 6}$. Erstellen Sie eine Wertetabelle, und zeichnen Sie den Graphen.

1.3.12 Definitionsmenge, Nullstellen, Polstellen

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{\sqrt{x + 7}}{x^2 - 1}.$$

Bestimmen Sie von der Funktion:

1. die Definitionsmenge
2. alle Nullstellen
3. alle Pole

1.3.13 Definitionsmenge, Nullstellen, Polstellen

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{e^{-x} - 2}{x + 1}.$$

Bestimmen Sie von der Funktion:

1. die größtmögliche Definitionsmenge
2. alle Nullstellen
3. alle Pole

1.3.14 Injektiv, Surjektiv, Bijektiv

Bestimmen Sie von folgenden Funktionen, ob sie injektiv, surjektiv, bijektiv sind oder keine dieser Eigenschaften haben? Argumentieren Sie anhand ihrer Graphen, und achten Sie auf die jeweiligen Definitions- und Wertemengen.

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x^3 - 2$
2. $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \cos(x)$
3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = 2e^{\frac{x}{5}}$

1.3.15 Umkehrfunktion

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty) : f(x) = 2e^{x-1}$.

1. Untersuchen Sie, ob die Funktion injektiv, surjektiv oder bijektiv ist.
2. Welche Eigenschaften injektiv, surjektiv oder bijektiv ist für die Berechnung der Umkehrfunktion notwendig?
3. Berechnen Sie die Umkehrfunktion, falls diese Eigenschaften zutreffen.

1.3.16 Umkehrfunktion

Untersuchen Sie, ob die Funktion injektiv, surjektiv oder bijektiv ist. Wenn möglich, geben Sie die Umkehrfunktion an.

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x^5$
2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x^4 + 1$

1.3.17 Umkehrfunktion

Berechnen Sie die Umkehrfunktionen von

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \sinh(x)$
2. $f : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1) : f(x) = \tanh(x)$

und machen Sie die Proben.

Literatur: Siehe [Pap18] Seite 305ff.

1.3.18 Luftdruck

Zwischen dem Luftdruck p (in bar) und der Höhe h (gemessen in Metern über dem Meeresniveau) gilt unter der Annahme konstanter Lufttemperatur der folgende Zusammenhang:

$$p(h) = p_0 e^{-\frac{h}{\alpha}}, \quad h \geq 0 \text{ in m}$$

Parameterwerte: Luftdruck an der Erdoberfläche $p_0 = 1,013$ bar, $\alpha = 7991$ m

1. Wie groß ist der Luftdruck in 10 km Höhe?
2. Wie muss die Bildmenge gewählt werden, damit die Funktion $p(h)$ surjektiv ist? Ist die Funktion auch injektiv und somit bijektiv?

3. Geben Sie, falls die Funktion invertierbar ist, die Höhe h als Funktion $h(p)$ des Luftdruckes p an, und plotten Sie ihren Graphen mit Python.
4. In welcher Höhe hat sich der Luftdruck halbiert?

1.3.19 (Un-)Gerade Funktionen

Welche der folgenden Funktionen sind gerade, ungerade oder weder noch? Begründen Sie Ihre Antwort mit einer Rechnung, die mit $f(-x) =$ beginnt.

1. $f(x) = 4 \sin(2x)$
2. $f(x) = \frac{x^2-1}{1+x^2}$
3. $f(x) = e^{-x}$
4. $f(x) = -3x^2 + x^6$
5. $f(x) = \frac{x^2}{\cos(x)+1}$
6. $f(x) = \tan(x)$
7. $f(x) = e^x$
8. $f(x) = \frac{x^2}{x^3+x}$
9. $f(x) = \cos(2x) - \cos(x)$
10. $f(x) = \ln(|x|)$

1.3.20 (Un-)Gerader Anteil

Jede Funktion $f(x)$ lässt sich in einen geraden Anteil $f_g(x)$ und einen ungeraden Anteil $f_u(x)$ aufspalten:

$$f_g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$$

$$f_u(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$$

Bestimmen Sie den geraden und den ungeraden Anteil von e^x . Plotten Sie alle drei Funktionen. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit den Definitionen der Funktionen $\cosh(x)$ und $\sinh(x)$.

1.3.21 Monotonieeigenschaften

Bestimmen Sie mit Hilfe eines Plots, in welchen Intervallen das Polynom $f(x) = 0.25x^3 + 2x^2 - 2x - 100$ welche Monotonieeigenschaften hat.

1.3.22 Operationen

Wie ändert sich die Funktionsgleichung $f(x) = e^{2x+1}$, wenn deren Graph um zwei Einheiten in die negative x -Richtung und um eine Einheit in die positive y -Richtung verschoben wird?

1.3.23 Fallschirmspringen

Beim Fallschirmspringen gilt unter der Annahme, dass der Luftwiderstand R der Fallgeschwindigkeit v proportional ist (d. h. $R = cv$ für eine Konstante c), das folgende Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz:

$$v(t) = \frac{mg}{c}(1 - e^{-\frac{c}{m}t})$$

Dabei bedeuten

- m : Masse des Fallschirmspringers inkl. Fallschirm
- g : Erdbeschleunigung
- $c > 0$: Reibungsfaktor

Aufgaben:

1. Welche Endgeschwindigkeit v_E erreicht der Fallschirmspringer?
2. Plotten Sie das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz im Bereich 0 s bis 300 s. Verwenden Sie $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $m = 70 \text{ kg}$ und $c = 2 \text{ Ns/m}$.
3. Nach welcher Zeit τ wird die halbe Endgeschwindigkeit erreicht?

Literatur: [Pap18] Seite 287.

2 Vektorrechnung

2.1 Methoden

Motivation

Vektoren werden sehr vielseitig eingesetzt, um Objekte zu modellieren, die mehr als eine Zahl für ihre Beschreibung benötigen. Beispiele: Punkte, Orts- und Verbindungsvektoren, Ereignisse in der Raumzeit, Zeiger, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, (Dreh-)Impulse, Kräfte, Signale, Zeitreihen, Preise, cash flows, (Einkaufs-)Listen, Zustände eines Systems. Vektoren finden Anwendungen in der analytischen Geometrie, der Physik, der Elektrotechnik, der Statik, der Robotik, der Statistik und Data Science, der Wirtschaft und in vielen anderen Gebieten. Das Rechnen mit Vektoren ist vergleichsweise einfach und daher leicht am Computer zu implementieren. Zudem lassen sich Vektoren und die davon abgeleiteten Objekte und Methoden anschaulich in Ebene und Raum darstellen.

2.1.1 Vektorraum \mathbb{R}^n

Ein n -**Vektor** ist eine geordnete Liste von n Zahlen, die **Komponenten** (auch Elemente oder Koordinaten) genannt werden. Ein Vektor a wird typischer Weise als **Spaltenvektor**

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

oder als **Zeilenvektor**

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

geschrieben. Zwei Vektoren sind gleich, wenn sie in allen Komponenten übereinstimmen. Ein **Nullvektor** ist ein Vektor, dessen Komponenten alle Null sind. Man schreibt verkürzt nur eine Null: $(0, 0, \dots, 0) = 0$.

Es sind auch andere Notationen für Vektoren üblich: mit eckigen statt runden Klammern, in fetter Schrift und mit einem Strichpunkt oder einem vertikalen Strich statt einem Komma zum Trennen der Komponenten. Oft wird auch ein Pfeil über den Vektor gezeichnet.

Achtung bei der Indexierung!

Eine Liste von z. B. 300 10er-Vektoren wird üblicherweise mit a_1, a_2, \dots, a_{300} bezeichnet. Dann

ist der Vektor $a_k \in \mathbb{R}^{10}$ und man schreibt die ihn in seinen Komponenten als

$$a_k = \begin{pmatrix} a_{k,1} \\ a_{k,2} \\ \vdots \\ a_{k,10} \end{pmatrix}.$$

Der \mathbb{R}^n ist die Menge aller n -Vektoren mit reellen Komponenten. Er hat die **Dimension** n , da jeder Vektor aus \mathbb{R}^n eindeutig durch n Zahlen, z. B. seine n Komponenten, beschreibbar ist. Es gilt $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, der Zahlenstrahl. Die Elemente des \mathbb{R}^2 kann man z. B. als Punkte, Ortsvektoren, Verbindungsvektoren oder freie Vektoren der Ebene identifizieren:

- Der Nullvektor ist der (Koordinaten-)Ursprung der Ebene.
- Den Vektor $(3, -2)$ als **Punkt** zu interpretieren, bedeutet, bei den Koordinaten 3 und -2 einen Punkt in das Koordinatensystem einzuzeichnen.
- **Ortsvektoren** zeichnet man als Pfeile, die vom Ursprung ausgehen und zum zugehörigen Punkt zeigen.
- Die zwei Punkte $P = (4, 3)$ und $Q = (5, -2)$ werden durch den **Verbindungsvektor** $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 5-4 \\ -2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ verbunden, den man als Pfeil von P nach Q zeichnet.
- Wenn man den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ nicht bei P "anbindet", sondern ihn in der Ebene an jeden Angriffspunkt "anbinden" kann, dann interpretiert ihn als **freien Vektor**.

Analog kann man den \mathbb{R}^3 mit dem Raum identifizieren. Die Vektoren der Ebene schreibt man gerne als (x, y) oder (a_x, a_y) anstatt mit Indizes (a_1, a_2) , und jene des Raums gerne als (x, y, z) oder (a_x, a_y, a_z) anstatt mit Indizes (a_1, a_2, a_3) . Wir werden uns in dieser Lehrveranstaltung bei den Anwendungen auf die Dimensionen $n = 2$ (Ebene) und $n = 3$ (Raum) einschränken, die Theorie (mit Ausnahme des Kreuzprodukts) aber weiterhin flexibel für alle $n \in \mathbb{N}$ präsentieren.

Die folgenden zwei Rechenoperationen machen aus der Menge \mathbb{R}^n einen sogenannten **Vektorraum**:

- **Skalarmultiplikation:** Die elementweise Multiplikation eines Skalars (einer Zahl) $\alpha \in \mathbb{R}$ mit allen Vektorkomponenten liefert wieder einen Vektor:

$$\alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix}$$

- **Addition:** Die elementweise Addition zweier Vektoren liefert wieder einen Vektor:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

Die **Subtraktion** $a - b$ zweier Vektoren ist erklärt als $a + (-1)b$ und entspricht der elementweise Subtraktion der Komponenten.

Die Interpretation dieser Rechenoperationen hängt davon ab, was die Vektoren modellieren! Interpretiert man Vektoren als Pfeile in der Ebene oder im Raum, dann kann man die Skalarmultiplikation als "Strecken/Stauchen/Umdrehen", die Addition als "Pfeil-Aneinanderreihung" und die Subtraktion mit der "Spitze minus Schaft"-Regel darstellen, siehe z. B. [Wikipedia](#).

Es gelten die üblichen, intuitiven Rechenregeln: $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$, $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$, $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a) = \beta(\alpha a)$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}^n$.

Zwei nicht-Null-Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ heißen **parallel**, wenn $b = \alpha a$ und $\alpha > 0$, und **antiparallel**, wenn $\alpha < 0$. In beiden Fällen heißen die Vektoren **kollinear**.

Ein Ausdruck der Form $\alpha a + \beta b$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}^n$ oder allgemeiner $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k$ mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$ und $a_i \in \mathbb{R}^n$ heißt **Linearkombination** der zwei bzw. k Vektoren. Eine Menge von k Vektoren a_1, a_2, \dots, a_k heißt **linear unabhängig**, wenn die Gleichung $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k = 0$ nur die triviale Lösung $\alpha_i = 0 \forall i = 1, \dots, k$ hat. Andernfalls heißen die k Vektoren **linear abhängig**, und mindestens einer der vorkommenden Vektoren lässt sich als Linearkombination der restlichen ausdrücken. Denn, wenn z. B. $\alpha_1 \neq 0$, dann kann man aus $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k = 0$ folgendes schließen:

$$\begin{aligned}\alpha_1 a_1 &= -\alpha_2 a_2 - \dots - \alpha_k a_k \\ a_1 &= \frac{1}{\alpha_1} (-\alpha_2 a_2 - \dots - \alpha_k a_k) \\ a_1 &= -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} a_2 - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} a_k.\end{aligned}$$

Zum Beispiel sind zwei kollineare Vektoren linear abhängig und zwei nicht kollineare Vektoren linear unabhängig.

2.1.2 Inneres Produkt

Eine weitere Rechenoperation stellt das **innere Produkt** (auch Skalarprodukt genannt, engl. oft *inner product* oder *dot product*) dar, das für zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ durch Multiplizieren der entsprechenden Komponenten und anschließendes Aufsummieren eine Zahl, also ein Skalar, liefert. Wir schreiben das innere Produkt von a mit b als

$$a \cdot b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

Auch hier sind andere Notationen verbreitet. Es gilt: $a \cdot b = b \cdot a$, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, $\alpha(a \cdot b) = (\alpha a) \cdot b = a \cdot (\alpha b)$.

Die **Länge** (Norm, Betrag) $\|a\|$ eines Vektors a wird über den verallgemeinerten Satz von Pythagoras als

$$\|a\| := \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

definiert und kann mit Hilfe des inneren Produktes als $\|a\| = \sqrt{a \cdot a}$ geschrieben werden. Ein Vektor mit Länge eins heißt **Einheitsvektor**. Falls ein Vektor a eine Länge $\|a\| \neq 0$ hat, kann man ihn durch $\frac{1}{\|a\|} a$ auf Länge eins skalieren und so einen zu a parallelen Einheitsvektor erhalten. Es gilt nämlich die Rechenregel $\|\alpha a\| = |\alpha| \|a\|$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

Der ungerichtete **Winkel** $\varphi \in [0, \pi]$ zwischen zwei nicht-Null-Vektoren a und b kann implizit über die Gleichung

$$a \cdot b = \|a\| \|b\| \cos(\varphi) \tag{2.1}$$

definiert und explizit mit $\varphi = \arccos\left(\frac{a \cdot b}{\|a\| \|b\|}\right)$ berechnet werden. Der Term $\|b\| \cos(\varphi)$ in Gleichung (2.1) kann geometrisch als die vorzeichenbehaftete **orthogonale** (=rechtwinklige) **Projektion** von a auf b interpretiert werden, siehe Abbildung 2.1. Das innere Produkt $a \cdot b$ ist geometrisch somit gleich der Länge von a mal der Projektion von a auf b .

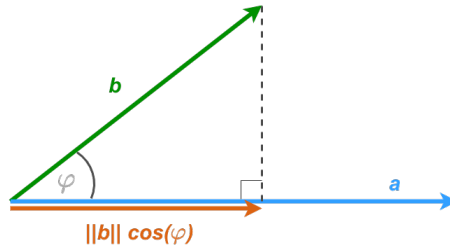


Abbildung 2.1: Inneres Produkt

Aus dieser geometrischen Interpretation ergeben sich einige wichtige Folgerungen für nicht-Null-Vektoren a und b :

- $a \cdot b > 0 \iff a$ und b bilden einen spitzen Winkel $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$ im **Bogenmaß**.
- $a \cdot b = 0 \iff a$ ist normal (orthogonal, rechtwinklig) auf b , also $\varphi = \frac{\pi}{2}$ im Bogenmaß. Man schreibt dies auch als $a \perp b$.
- $a \cdot b < 0 \iff a$ und b bilden einen stumpfen Winkel $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ im Bogenmaß.

Da mit dem inneren Produkt Längen und Winkel berechnet werden können, wird durch das innere Produkt die euklidische Geometrie “berechenbar”, d. h. analytisch, vgl. Kapitel 2.1.4.

In der Ebene \mathbb{R}^2 bilden die Vektoren $e_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die sogenannte **Standardbasis** und heißen **Standardbasisvektoren**. Sie sind aufeinander normal und haben die Länge eins. Beides zusammen macht sie zu einem **Orthonormalsystem**. Im Raum \mathbb{R}^3 bilden die Standardbasisvektoren $e_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Orthonormalsystem.

2.1.3 Kreuz- und Spatprodukt

Im dreidimensionalen Raum \mathbb{R}^3 gibt es noch ein weiteres Produkt von zwei Vektoren, das sogenannte Kreuzprodukt, auch Vektorprodukt, vektorielles Produkt oder äußeres Produkt genannt. Es liefert als Ergebnis keine Zahl, sondern wieder einen dreidimensionalen Vektor:

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -(a_x b_z - a_z b_x) \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Der Vektor $a \times b$ ist geometrisch eindeutig durch die folgenden Eigenschaften bestimmt, vgl. [Wikipedia](#) und siehe Abbildung 2.2:

- $(a \times b) \perp a$ und $(a \times b) \perp b$.
- $\|a \times b\|$ ist gleich dem Flächeninhalt $\|a\| \|b\| \sin(\varphi)$ des von a und b aufgespannten Parallelogramms.
- $(a, b, a \times b)$ bilden ein Rechtssystem (Rechte-Hand-Regel).

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

- $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
- $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$
- $a \times b = -b \times a$

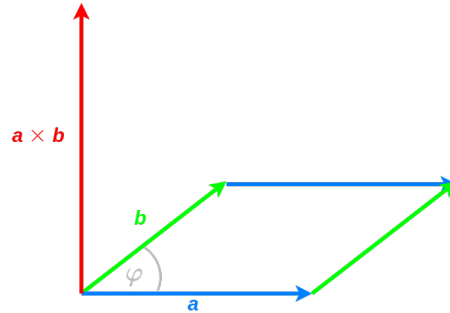


Abbildung 2.2: Kreuzprodukt

- $\alpha(a \times b) = (\alpha a) \times b = a \times (\alpha b)$

Weiters gilt $a \times b = 0 \iff a$ und b sind kollinear und somit linear abhängig. Das Kreuzprodukt wird zum Beispiel verwendet, um in der Mechanik Drehimpuls und Drehmoment zu definieren und um in der Elektrotechnik die Lorentz-Kraft zu beschreiben.

Mit dem sogenannten **Spatprodukt** kann man das Volumen des durch die drei räumliche Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ aufgespannten Spats (Parallelepipeds) zu berechnen, siehe Abbildung 2.3.

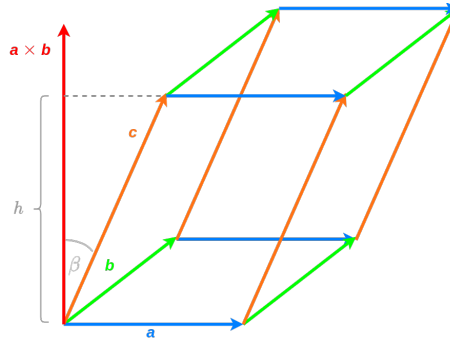


Abbildung 2.3: Spatprodukt

Das Spatprodukt von a, b und c ist definiert als

$$[a, b, c] := (a \times b) \cdot c.$$

Es gilt $[a, b, c] = (a \times b) \cdot c = \|a \times b\| \|c\| \cos(\beta)$, wobei β den Winkel zwischen $a \times b$ und c bezeichnet. Der Term $\|a \times b\|$ ist gleich dem Flächeninhalt G des von a und b aufgespannten Parallelogramms, und $\|c\| \cos(\beta)$ ist im Betrag gleich der Höhe h des Spats. Somit erhalten wir $|[a, b, c]| = Gh = V$ dem Volumen des Spats.

Es gilt $[a, b, c] = 0 \iff a, b, c$ sind linear abhängig. \iff Der von a, b, c aufgespannte Spat hat Null Volumen. $\iff a, b, c$ liegen in einer Ebene.

2.1.4 Analytische Geometrie

2.1.4.1 Geraden

Eine **Gerade in der Ebene** kann neben der Form $y = kx + d$ auch in Parameterform und in Normalvektorform angegeben werden:

- **Parameterform:** Jeder Punkt $X \in \mathbb{R}^2$ der Geraden ist die Summe aus einem gegebenen Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ der Geraden und einem Vielfachen $\lambda \in \mathbb{R}$ des gegebenen Richtungsvektors $r \in \mathbb{R}^2$:

$$X = P + \lambda r$$

zum Beispiel:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- **Normalvektorform:** Gegeben ist ein Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ der Geraden und ein Normalvektor $n \in \mathbb{R}^2$ der Geraden. Dann ist der Verbindungsvektor \overrightarrow{PX} von P zu einem Punkt $X \in \mathbb{R}^2$ der Geraden normal auf den Normalvektor n :

$$\begin{aligned} n \cdot \overrightarrow{PX} &= 0 \\ n \cdot (X - P) &= 0 \\ n \cdot X - n \cdot P &= 0 \\ n \cdot X &= n \cdot P \end{aligned}$$

zum Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$2x + y = 8$$

Bemerkung: In der Ebenen kann man ein Vektor (a_x, a_y) leicht um 90° gegen den Uhrzeigersinn oder 90° im Uhrzeigersinn drehen: $(-a_y, a_x)$ bzw. $(a_y, -a_x)$.

Eine **Gerade im Raum** kann in Parameterform $X = P + \lambda r \in \mathbb{R}^3$ oder als Schnitt zweier Ebenen angegeben werden.

2.1.4.2 Ebenen

Eine **Ebene im Raum** in Parameterform und in Normalvektorform angegeben werden:

- **Parameterform:** Jeder Punkt $X \in \mathbb{R}^3$ der Ebene ist die Summe aus einem gegebenen Punkt $P \in \mathbb{R}^3$ der Ebene, einem Vielfachen $\lambda \in \mathbb{R}$ eines ersten gegebenen Richtungsvektors $a \in \mathbb{R}^3$ und dem Vielfachen $\mu \in \mathbb{R}$ eines zweiten, nicht kollinearen gegebenen Richtungsvektors $b \in \mathbb{R}^3$:

$$X = P + \lambda a + \mu b$$

- **Normalvektorform:** Eine zum Fall der Geraden in der Ebene analoge Argumentation führt zur analogen Gleichung

$$n \cdot X = n \cdot P$$

im Raum, zum Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$3x + y + 4z = 7$$

2.1.4.3 Kreise und Kugeln

Der **Kreis** in der Ebene mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt $M = (u, v)$ besteht aus allen Punkten $X = (x, y)$ der Ebene, deren Abstand zum Mittelpunkt gleich dem Radius ist, d. h.

$$\begin{aligned}\|\overline{MX}\| &= r \\ \|X - M\| &= r \\ \|(x - u, y - v)\| &= r \\ \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2} &= r \\ (x - u)^2 + (y - v)^2 &= r^2\end{aligned}$$

Eine analoge Argumentation führt zur Gleichung $(x - u)^2 + (y - v)^2 + (z - w)^2 = r^2$ einer **Kugel** im Raum.

2.2 Beispiele

2.2.1 Längen, Winkel, Flächeninhalt

Durch die drei Punkte $A = (1, 4, -2)$, $B = (3, 1, 0)$ und $C = (-1, 1, 2)$ werden die Ecken eines Dreiecks festgelegt. Berechnen Sie die Längen der drei Seiten, die Innenwinkel sowie den Flächeninhalt des Dreiecks.

Quelle: [Pap18] Kapitel II, Abschnitt 2 und 3, Aufgabe 17

Lösung: Siehe Abbildung 2.4 und Abbildung 2.5.

17) Festlegung der Seitenvektoren nach Bild A-18 ($\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$):

$$\vec{a} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad |\vec{a}| = \sqrt{20};$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{29}; \quad |\vec{c}| = \sqrt{17}$$

Bild A-18

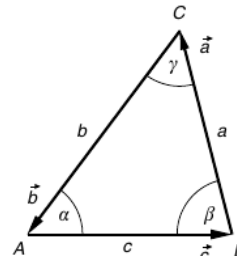


Abbildung 2.4: Quelle: [Pap18] Kapitel II, Abschnitt 2 und 3, Aufgabe 17

2.2.2 Lineare Abhängigkeit

Zeigen Sie jeweils, dass die Vektoren linear abhängig sind.

$$1. \quad a = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$2. \quad a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

α : Winkel zwischen $-\vec{b}$ und \vec{c} ; β : Winkel zwischen \vec{a} und $-\vec{c}$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{(-\vec{b}) \cdot \vec{c}}{|-\vec{b}| \cdot |\vec{c}|}\right) = \arccos\left(\frac{-\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|}\right) = \arccos\left(\frac{13}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{17}}\right) = 54,16^\circ$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot (-\vec{c})}{|\vec{a}| \cdot |-\vec{c}|}\right) = \arccos\left(\frac{-\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|}\right) = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{17}}\right) = 77,47^\circ$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 48,37^\circ$$

$$\text{Fläche: } A = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} \sqrt{20} \cdot \sqrt{29} \cdot \sin 48,37^\circ = 9$$

Abbildung 2.5: Quelle: [Pap18] Kapitel II, Abschnitt 2 und 3, Aufgabe 17

Quelle: [Pap18] Kapitel II, Abschnitt 2+3, Aufgabe 31

Lösung:

1. Die Vektoren sind ein Vielfaches voneinander: $b = -3a$. Daher sind sie kollinear und linear abhängig.
2. Das Spatprodukt $[a, b, c]$ der drei Vektoren ergibt Null:

$$\begin{aligned} [a, b, c] &= (a \times b) \cdot c = \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 16 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= 80 - 80 = 0. \end{aligned}$$

Daher hat das von ihnen aufgespannte Parallelepiped kein Volumen. Die Vektoren liegen daher in einer Ebene und sind linear abhängig.

2.2.3 Lineare (Un-)Abhängigkeit

Sei $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Bestimmen Sie, ob die Vektoren v_i linear (un)abhängig sind.
2. Falls möglich finden Sie eine Linearkombination $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ nicht Null, so dass $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$.

Lösung:

Die Vektoren v_i sind linear abhängig, da $[v_1, v_2, v_3] = 0$. Das lineare Gleichungssystem $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$ für die Koeffizienten $\alpha_i \in \mathbb{R}$ hat daher nicht-triviale Lösungen. In Komponenten ausgeschrieben lautet die Vektorgleichung $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In Gleichungsform:

$$\begin{aligned}1\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 1\alpha_3 &= 0 \\3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 0\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

Das lineare Gleichungssystem lässt sich z. B. mit dem [Gaußschen Eliminationsverfahren](#) lösen. Der Lösungsraum ist eindimensional und kann z. B. mit α_3 parametrisiert werden:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 2\alpha_3 \\ \alpha_2 &= -\alpha_3 \\ \alpha_3 &= \text{frei wählbar}\end{aligned}$$

Das lineare Gleichungssystem $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$ hat daher auch nicht-triviale Lösungen, z. B. mit $\alpha_3 = -1$ gilt $-2v_1 + v_2 - v_3 = 0$.

2.2.4 Gerade und Ebene

Welche Lage haben die Gerade g und die Ebene E zueinander? Bestimmen Sie gegebenenfalls Abstand, Schnittpunkt und Schnittwinkel.

$$\begin{aligned}g: X &= \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \\ E: \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} &= 0\end{aligned}$$

Quelle: [\[Pap18\]](#) Kapitel II, Abschnitt 4, Aufgabe 19b

Lösung: Zur Bestimmung der Lage von Gerade und Ebene berechnen wir das innere Produkt des Richtungsvektors der Geraden mit dem Normalvektor der Ebene:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 6 - 5 - 1 = 0.$$

Die beiden Vektoren sind daher orthogonal zueinander, und die Gerade ist parallel zur Ebene. Um ihren Abstand voneinander zu bestimmen, berechnen wir das innere Produkt des auf Länge eins skalierten Normalvektors der Ebene mit dem Verbindungsvektor zwischen dem gegebenen Punkt der Ebene und dem gegebenen Punkt der Geraden:

$$\frac{1}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5-1 \\ 3-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \frac{5}{\sqrt{11}} = 1,51.$$

Gerade und Ebene sind somit im Abstand 1,51 parallel.

2.2.5 Ebene und Punkt

Eine Ebene E geht durch den Punkt $P = (1, 2, 3)$. Ihr Normalvektor sein $n = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$. Wie groß muss a sein, sodass der Abstand des Punktes $Q = (0, 2, 5)$ von der Ebene 2 beträgt?

Lösung: Der Abstand d muss die Bedingung $d = \left| \frac{1}{\sqrt{2^2+1^2+a^2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-0 \\ 2-2 \\ 3-5 \end{pmatrix} \right| = 2$ erfüllen. Dies führt zur Gleichung $|1-a| = \sqrt{5+a^2}$, die durch Quadrieren zu $1-2a+a^2 = 5+a^2$ und schließlich zu $a = -2$ wird. Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung $|1-a| = \sqrt{5+a^2}$ zeigt, dass $a = -2$ tatsächlich eine Lösung ist.

2.2.6 Geometrische Figuren

Welche geometrischen Figuren werden durch die folgenden Gleichungen beschrieben?

- $x^2 - 6x + y^2 + 8y = 0$
- $9x^2 - 36x + 4y^2 + 24y + 36 = 0$

Lösung:

- Durch [Quadratische Ergänzung](#) erhalten wir:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + y^2 + 8y &= 0 \\ (x-3)^2 - 9 + (y+4)^2 - 16 &= 0 \\ (x-3)^2 + (y+4)^2 &= 25 \\ (x-3)^2 + (y+4)^2 &= 5^2 \end{aligned}$$

Die Gleichung beschreibt einen Kreis mit Mittelpunkt $(3, -4)$ und Radius 5.

- Durch [Quadratische Ergänzung](#) erhalten wir:

$$\begin{aligned} 9x^2 - 36x + 4y^2 + 24y + 36 &= 0 \\ 9(x^2 - 4x) + 4(y^2 + 6y) + 36 &= 0 \\ 9((x-2)^2 - 4) + 4((y+3)^2 - 9) + 36 &= 0 \\ 9(x-2)^2 - 36 + 4(y+3)^2 - 36 + 36 &= 0 \\ 9(x-2)^2 + 4(y+3)^2 &= 36 \\ \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$

Die Gleichung beschreibt eine [verschobene Ellipse](#) mit Mittelpunkt $M = (2, -3)$ und Halbachsen $a = 2$ und $b = 3$.

2.3 Aufgaben

2.3.1 Rechnen im Vektorraum

Gegeben sind die Vektoren $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Berechnen Sie $-v$, $-2v$, $u+v$, $u-v$ und $u-2v$.
- Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse grafisch.

2.3.2 Vektorgleichung und lineares Gleichungssystem

Welchem linearen Gleichungssystem entspricht die Vektorgleichung

$$x \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix},$$

und bestimmen Sie seine Lösungsmenge.

2.3.3 Linearkombination

Schreiben Sie den Vektor $v = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ als eine Linearkombination von zwei Vektoren, von denen einer auf der Geraden $y = \frac{x}{2}$ und der andere auf der Geraden $y = 2x$ liegt. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis grafisch.

2.3.4 Winkel

1. Welchen Winkel schließen die Vektoren $a = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ miteinander ein?
2. Zeigen Sie, dass die drei Vektoren $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Welche Vektoren sind Katheten, und welcher Vektor ist die Hypotenuse?

Quelle: [Pap18] Kapitel II, Abschnitt 2+3, Aufgaben 11b und 15

2.3.5 Winkel

1. Welchen Winkel schließen die Vektoren $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ miteinander ein?
2. Zeigen Sie, dass die Vektoren $a = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ zueinander orthogonal sind.

Quelle: [Pap18] Kapitel II, Abschnitt 2+3, Aufgaben 11a und 12a

2.3.6 Orthonormiertes System

Zeigen Sie: Die Vektoren $a = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bilden ein orthonormiertes System, d. h. die Vektoren stehen paarweise senkrecht aufeinander und besitzen jeweils die Länge 1.

Quelle: [Pap18] Kapitel II, Abschnitt 2-3, Aufgabe 14

2.3.7 Volumen

Bestimmen Sie das Volumen des von den Vektoren $a = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$ gebildeten Parallelepipeds (=Spats).

Quelle: [Pap18] Kapitel II, Abschnitt 2+3, Aufgabe 28

2.3.8 Spatprodukt

Zeigen Sie mit Hilfe des Spatprodukts: Die Vektoren $a = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 25 \end{pmatrix}$ liegen in einer gemeinsamen Ebene.

Quelle: [Pap18] Kapitel II, Abschnitt 2+3, Aufgabe 27a

2.3.9 Lineare Abhängigkeit

Zeigen Sie: Die Vektoren sind linear abhängig: $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Quelle: [Pap18] Kapitel II, Abschnitt 2-3, Aufgabe 31

2.3.10 Gerade und Ebene

Gegeben sind eine Gerade g und eine Ebene E :

$$g : X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$E : 2x + y + z = 1$$

1. Zeigen Sie, ohne einen Schnittpunkt zu berechnen, dass sich die Gerade und die Ebene schneiden.
2. Berechnen Sie den Schnittpunkt sowie den Schnittwinkel.

Quelle: [Pap18] Kapitel II, Abschnitt 4, Aufgabe 23:

2.3.11 Gerade und Ebene

Eine Ebene enthält den Punkt $P = (2, 1, 8)$ und hat den Normalvektor $n = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Zeigen Sie, dass die Gerade $g : X = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ zu dieser Ebene parallel ist.
2. Wie groß ist der Abstand zwischen Gerade und Ebene?

2.3.12 Schnittpunkt zweier Geraden

Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden

$$\begin{aligned}2x - 3y &= 8 \\ -x + 4y &= -9\end{aligned}$$

und überprüfen Sie Ihr Ergebnis grafisch.

2.3.13 Ebenengleichung

Berechnen Sie die Gleichung jener Ebene, die alle drei Koordinatenachsen im selben Abstand vom Ursprung schneidet und durch den Punkt $P = (3, -4, 7)$ geht.

2.3.14 Abstand zweier Ebenen

Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Ebenen parallel sind, und berechnen Sie ihren Abstand.

$$\begin{aligned}E_1 : \text{Punkt } P_1 &= (3, 5, 6), \text{ Normalvektor } n_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \\ E_2 : \text{Punkt } P_2 &= (1, 5, -2), \text{ Normalvektor } n_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

2.3.15 Normalvektor und Ebene

Ein Normalvektor schließt mit der x -Achse einen Winkel von 60° ein und mit der y -Achse einen Winkel von 70° . Der Winkel mit der z -Achse liegt zwischen 0° und 90° .

1. Berechnen Sie den Normalvektor.
2. Bestimmen Sie die Ebene mit diesem Normalvektor, die den Punkt $P = (1, 1, 1)$ enthält.

2.3.16 Mehr Aufgaben

- [\[Pap18\]](#) Kapitel II
 - Abschnitt 2 und 3, Aufgaben 1 - 32
 - Abschnitt 4, Aufgaben 1 - 25
- [\[Pap20\]](#) Kapitel I Vektorrechnung, Abschnitt 1 Vektoroperationen: I1 - I43
- [\[Pap19\]](#) Kapitel I Vektorrechnung, Beispiele 1 - 19

3 Komplexe Zahlen

3.1 Methoden

Motivation

Im Kapitel [Grundkonzepte](#) haben wir die wachsenden Zahlenmengen $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ besprochen. Wie kann diese Folge weitergeführt werden? Welchen Nutzen könnte eine neue Zahlenmenge haben, die größer ist als die reellen Zahlen? Darum geht es in diesem Kapitel, in dem wir die komplexen Zahlen als Erweiterung der reellen Zahlen einführen und einige ihrer vielfältigen Anwendungen aufzeigen werden.

Die komplexen Zahlen können als Vektoren der Ebene interpretiert werden, die mit einer neuen Multiplikation ausgestattet werden. Diese Änderung der algebraischen Struktur vereinfacht in der Folge viele andernfalls mühselige und komplizierte Berechnungen – so wie bei anderen Erweiterungen von Zahlenmengen. Komplexe Zahlen werden insbesondere in der Elektrotechnik und Signalanalyse (Fourier-Transformation) aber z. B. auch in der Quantenmechanik verwendet.

3.1.1 Kartesische Form

Um die Diagonale des Einheitsquadrats zu berechnen, muss man die Gleichung $x^2 = 2$ lösen, was in \mathbb{R} möglich in \mathbb{Q} aber unmöglich ist, vgl. [Wikipedia](#). Auf analoge Weise kann man die Gleichung $x^2 = -1$ in der **Menge \mathbb{C} der komplexen Zahlen** lösen, aber nicht in \mathbb{R} . Die Lösungen von $x^2 = -1$ werden als die **imaginäre Einheit** j und die negative imaginäre Einheit $-j$ definiert. Es gilt also $(-j)^2 = j^2 = -1$. Wir verwenden hier das in der komplexen Wechselstromrechnung verwendete Symbol j anstatt des in der Mathematik üblichen Symbols i .

Eine komplexe Zahl z kann definiert werden als die Summe einer reellen Zahl x und einem reellen Vielfachen y der imaginären Einheit j :

$$z = x + jy$$

Eine komplexe Zahl $z = x + jy$ enthält somit dieselbe Information wie der Vektor (x, y) der Ebene. Daher wird sie auch gerne als Zeiger (=Ortsvektor) in der Ebene (=komplexe Zahlenebene) dargestellt, vgl. [Wikipedia](#). Der reelle Anteil x heißt **Realteil** von z , geschrieben als $\operatorname{Re}(z) = x$, und das Vielfache y der imaginären Einheit heißt **Imaginärteil**, geschrieben als $\operatorname{Im}(z) = y$. Die Darstellung einer komplexen Zahl mittels der kartesischen Koordinaten x (Realteil) und y (Imaginärteil) als $z = x + jy$ ist die **kartesische Form** von z . In [Abbildung 3.1](#) wird die komplexe Zahl $z = 3 + 2j$ in der komplexen Zahlenebene dargestellt.

Zwei komplexe Zahlen sind gleich, wenn sie in Real- und Imaginärteil übereinstimmen, vgl. die Gleichheit von Vektoren. Das Rechnen mit komplexen Zahlen funktioniert unter der Berücksichtigung von

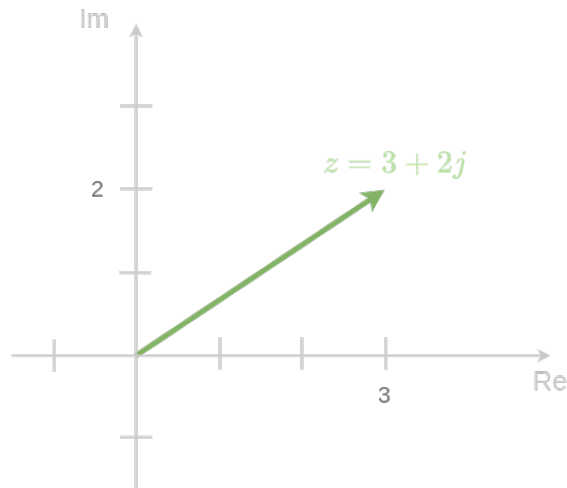


Abbildung 3.1: Komplexe Zahl in kartesischer Darstellung

$j^2 = -1$ mit den selben Rechenregeln wie beim Rechnen mit reellen Zahlen. So erfolgt z. B. die Addition und Subtraktion wie in der Vektorrechnung komponentenweise. Zur Multiplikation und Division von komplexen Zahlen gibt es aber keine äquivalente Rechenoperation in der Vektorrechnung.

Eine sehr hilfreiche, zusätzliche Rechenoperation ist die sogenannte **Konjugation**, die bei einer komplexen Zahl j durch $-j$ ersetzt. Für $z = x + jy$ schreibt man die **konjugiert komplexe Zahl** $x - jy$ als \bar{z} oder z^* . Es gelten:

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$
- $\overline{\bar{z}} = z$
- $\bar{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$, d. h. $\text{Im}(z) = 0$

Geometrisch entspricht die Konjugation der Spiegelung an der Realteil-Achse der komplexen Zahlenebene. Die Konjugation ist z. B. bei der Division zweier komplexer Zahlen hilfreich. Man erweitert dabei den Quotienten mit dem konjugiert komplexen Nenner, um diesen reell zu machen. Hier ein Beispiel:

$$\begin{aligned} \frac{4 - 8j}{3 + 4j} &= \frac{(4 - 8j)(3 - 4j)}{(3 + 4j)(3 - 4j)} = \frac{12 - 16j - 24j + 32j^2}{9 - 16j^2} = \\ &= \frac{12 - 40j - 32}{9 + 16} = \frac{-20 - 40j}{25} = \\ &= -\frac{4}{5} - \frac{8}{5}j = -0,8 - 1,6j \end{aligned}$$

Die Länge (Norm, Betrag, Radius) einer komplexen Zahl $z = x + jy$ ist wie in der Vektorrechnung über den Satz von Pythagoras definiert:

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

Mit Hilfe der Konjugation kann man die Länge auch als $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ berechnen.

3.1.2 Polarform

Um eine komplexe Zahl $z = x + jy$ in der **Polarform** darzustellen, verwendet man ihren Radius (Länge, Norm, Betrag) $r = |z|$ und ihren gerichteten Winkel (Argument) $\varphi = \arg(z)$ als Koordinaten, siehe Abbildung 3.2.

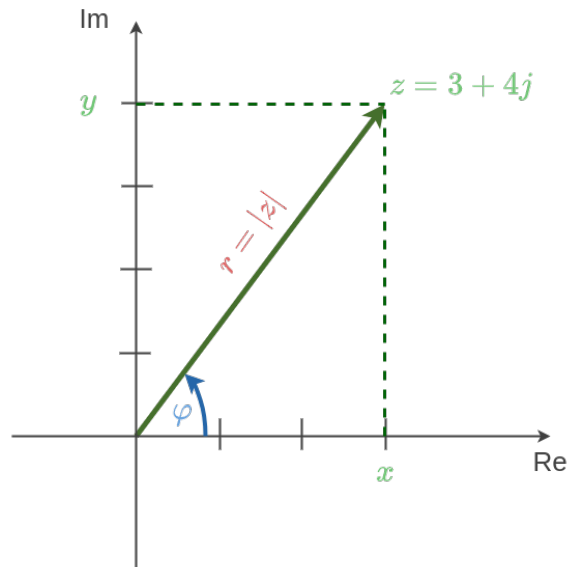


Abbildung 3.2: Polarform

Für das rechtwinklige Dreieck mit Seitenlängen r , x und y erkennt man, dass $x = r \cos(\varphi)$, $y = r \sin(\varphi)$ und daher ist

$$z = r \cos(\varphi) + jr \sin(\varphi) = r[\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)].$$

💡 Exponentialfunktion und Eulersche Formel

Die Exponentialfunktion e^x kann mit einer sogenannten **Potenzreihe**

$$e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

definiert und beliebig genau berechnet werden. Auch für Sinus und Kosinus gibt es Potenzreihen:

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$$

$$\cos(x) = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots$$

Setzt man für $x = j\varphi$ in die Potenzreihe von e^x ein und vergleicht das Ergebnis mit den Potenzreihen von Sinus und Kosinus, so erhält man die berühmte **Eulersche Formel**

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi).$$

Mit Hilfe der Eulerschen Formel kann man eine komplexe Zahl auch in der sogenannten Exponentialform (auch eine Polarform) schreiben:

$$z = r e^{j\varphi}$$

Um den Winkel einer in kartesischer Form gegebener komplexen Zahl zu berechnen verwendet man meist die Umkehrfunktion des Tangens, nämlich den **Arcustangens** $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, siehe Abbildung 3.3.

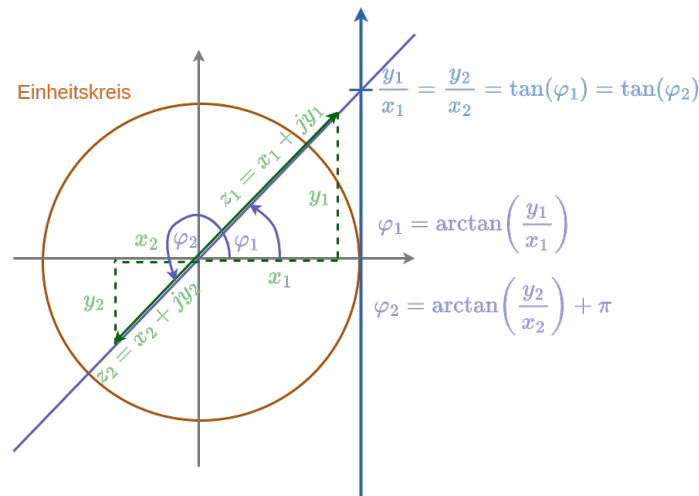


Abbildung 3.3: Tangens und Arcustangens

- Wenn die komplexe Zahl z wie in Abbildung 3.3 im ersten Quadranten oder im vierten Quadranten liegt, dann ist der mit dem Arcustangens berechnete Winkel korrekt: $\varphi = \arctan(\frac{y}{x})$.
- Wenn z aber im zweiten oder dritten Quadranten liegt, muss man zu $\arctan(\frac{y}{x})$ noch π dazu addieren, um den korrekten Winkel im Bogenmaß zu erhalten: $\varphi = \arctan(\frac{y}{x}) + \pi$.

Aufgrund der Potenzgesetze ist das Multiplizieren, Dividieren und Potenzieren in Polarform sehr einfach und anschaulich:

- $r_1 e^{j\varphi_1} \cdot r_2 e^{j\varphi_2} = (r_1 \cdot r_2) e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$, d. h. die Radien werden multipliziert, und die Winkel werden addiert.
- $\frac{r_1 e^{j\varphi_1}}{r_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$, d. h. die Radien werden dividiert, und die Winkel werden subtrahiert.
- $(r e^{j\varphi})^n = r^n e^{jn\varphi}$, d. h. der Radius wird potenziert, und der Winkel wird multipliziert.

Geometrische Interpretation: Die Multiplikation einer komplexen Zahl z mit einer anderen komplexen Zahl $r e^{j\varphi}$ dreht z um den Winkel φ gegen den Uhrzeigersinn und streckt z um den Faktor r , falls $r \geq 1$, bzw. staucht z um den Faktor r , falls $r \leq 1$. Die komplexe Multiplikation entspricht in diesem Sinn einer Drehstreckung bzw. Drehstauchung.

3.1.3 Fundamentalsatz der Algebra

Eine algebraische Gleichung n -ten Grades hat die Form

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$. Die Lösungen werden in den komplexen Zahlen \mathbb{C} gesucht. Ein Beispiel: $-4z^3 + (3 - 2j)z^2 + 7z - 2j = 0$.

Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass eine algebraische Gleichung n -ten Grades mit $n \geq 1$ immer genau n Lösungen z_1, \dots, z_n besitzt, wobei mehrfache Lösungen entsprechend oft gezählt werden. Die linke Seite der algebraischen Gleichung, ein Polynom n -ten Grades, kann mit den Lösungen

in seine Linearfaktoren zerlegt werden:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$$

Bei ausschließlich reellen Koeffizienten a_k sind die Lösungen paarweise zueinander konjugiert komplexe Zahlen. Das erkennt man daran, dass das Konjugieren der algebraischen Gleichung die Koeffizienten nicht verändert, aber Lösungen in konjugiert komplexen Lösungen überführt. Zum Beispiel hat $z^3 - z^2 + 4z - 4 = 0$ die Lösungen $z_1 = 1$, $z_2 = 2j$ und $z_3 = -2j$ und $z^3 - z^2 + 4z - 4 = (z - 1)(z - 2j)(z + 2j)$.

Ein Spezialfall sind die Gleichungen $z^n = a$ mit $a \in \mathbb{C}$, die n verschiedene **Wurzeln** besitzen. Für $n = 2$ gibt es mit $a = x + jy$ die Lösungsformel

$$z_{0,1} = \pm \left(\sqrt{\frac{|a| + x}{2}} + j \cdot \operatorname{sgn}(y) \sqrt{\frac{|a| - x}{2}} \right),$$

wobei $\operatorname{sgn}(y) := 1$ für $y \geq 0$ und $\operatorname{sgn}(y) := -1$ für $y < 0$. Für allgemeines $n \geq 1$ schreibt man a zuerst in Polarform $a = r e^{j\varphi}$ um. Die n verschiedenen Lösungen lauten dann:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{j\left(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}\right)} \text{ mit } k = 0, \dots, n - 1$$

3.1.4 Wechselstromrechnung

Die komplexen Zahlen werden in der Wechselstromrechnung verwendet, um Berechnungen mit harmonisch schwingenden Spannungen und Strömen zu vereinfachen. Siehe z. B. [Pap18] Seite 683 ff. Eine **harmonische Schwingung** ist eine Schwingung $y(t)$, die sich als

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \text{ oder als} \\ y(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

schreiben lässt. Dabei ist A die **Amplitude** (der Scheitelwert), ω die **Kreisfrequenz** und φ die **Phase** (der Phasenwinkel) der harmonischen Schwingung. Zwischen der Periodendauer (Schwingungsdauer) T , der Frequenz f und der Kreisfrequenz ω bestehen die folgenden Beziehungen

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \text{ bzw. } \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}.$$

Zwischen Sinus und Kosinus kann man mit den folgenden Formeln wechseln:

$$\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin(\alpha) = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T = 0.5 # seconds
f = 1/T
omega = 2*np.pi*f
A = 1.5
phi = np.pi/4
```

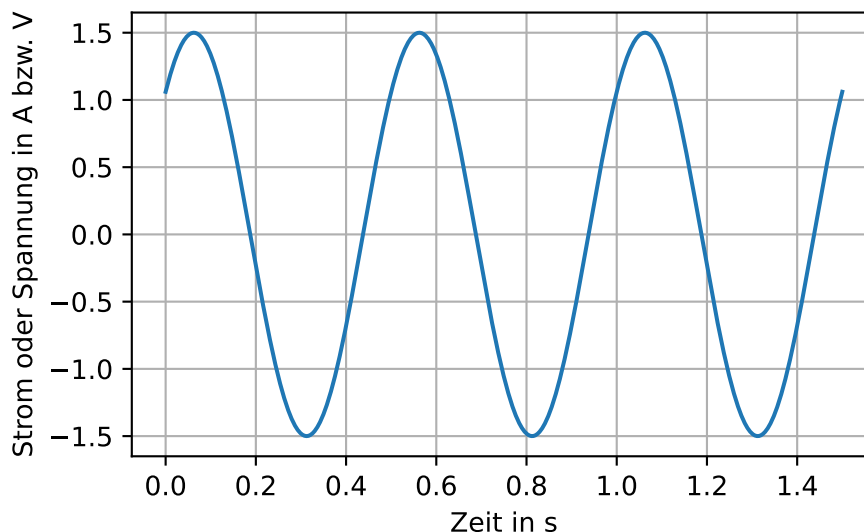


```

t = np.linspace(0, 3*T, 1000)
y = A*np.sin(omega*t + phi)

plt.figure(figsize=(5, 3))
plt.plot(t, y)
plt.xlabel("Zeit in s")
plt.ylabel("Strom oder Spannung in A bzw. V")
plt.grid(True)

```



Wir behandeln hier exemplarisch nur eine der vielen Anwendungen der komplexen Zahlen in der Wechselstromrechnung, nämlich die **Überlagerung gleichfrequenter harmonischer Schwingungen**: Seien $y_1(t) = a_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1)$ und $y_2(t) = a_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$ zwei gleichfrequente harmonische Schwingungen, z. B. Strom oder Spannung. Wie lässt sich ihre Überlagerung (=Summe) $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ am besten berechnen? Dazu schreibt man $y_1(t)$ als Imaginärteil der komplexen Schwingung $Y_1(t) = A_1 \cdot e^{j\omega t}$ mit $A_1 \in \mathbb{C}$ und $y_2(t)$ als Imaginärteil der komplexen Schwingung $Y_2(t) = A_2 \cdot e^{j\omega t}$ mit $A_2 \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= a_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) = \\
&= \operatorname{Im}(a_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) + j \cdot a_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1)) = \\
&= \operatorname{Im}(a_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)}) = \\
&= \operatorname{Im}(a_1 e^{j\varphi_1} \cdot e^{j\omega t}) \\
y_2(t) &= \dots = \\
&= \operatorname{Im}(a_2 e^{j\varphi_2} \cdot e^{j\omega t})
\end{aligned}$$

Wir erhalten daraus $A_1 = a_1 e^{j\varphi_1}$ und $A_2 = a_2 e^{j\varphi_2}$. Nun lässt sich die Überlagerung der Schwingungen

durch die Addition der komplexen Amplituden (Zeiger) A_1 und A_2 darstellen:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= y_1(t) + y_2(t) = \\
 &= \text{Im}(Y_1(t)) + \text{Im}(Y_2(t)) = \\
 &= \text{Im}(Y_1(t) + Y_2(t)) = \\
 &= \text{Im}(A_1 \cdot e^{j\omega t} + A_2 \cdot e^{j\omega t}) = \\
 &= \text{Im}([A_1 + A_2] \cdot e^{j\omega t}) = \\
 &= \text{Im}(A \cdot e^{j\omega t}) = \\
 &= \text{Im}(ae^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}) = \\
 &= \text{Im}(ae^{j(\omega t + \varphi)}) = \\
 &= \text{Im}(a \cdot \cos(\omega t + \varphi) + a \cdot \sin(\omega t + \varphi)) = \\
 &= a \cdot \sin(\omega t + \varphi)
 \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Summe der komplexen Amplituden A_1 und A_2 als $A_1 + A_2 = A$ geschrieben und ihre Polardarstellung als $A = ae^{j\varphi}$. Der Umweg über die komplexe Darstellung gibt uns das Ergebnis, dass die Überlagerung der harmonischen Schwingungen $y_1(t)$ und $y_2(t)$ der Kreisfrequenz ω wieder eine harmonische Schwingung der selben Kreisfrequenz ist und sich ihre Amplitude a und Phase φ aus der Addition der komplexen Amplituden

$$a_1 e^{j\varphi_1} + a_2 e^{j\varphi_2} = A_1 + A_2 = A = ae^{j\varphi}$$

berechnen lässt.

3.2 Beispiele

3.2.1 Kartesisch Rechnen

Wir bestimmen von $\frac{4(3-j)^*}{(1+j)(-1+j)}$ den Real- und den Imaginärteil.

$$\begin{aligned}
 \frac{4(3-j)^*}{(1+j)(-1+j)} &= \frac{4(3+j)}{-1+j-j+j^2} = \\
 &= \frac{4(3+j)}{-1-1} = -2(3+j) = \\
 &= -6 - 2j
 \end{aligned}$$

Somit lauten Real- den Imaginärteil: $\text{Re}(z) = -6$, $\text{Im}(z) = -2$.

3.2.2 Polarform

Wir bestimmen die Polarform von $z = -2 - 6j$.

- Der Radius r ist die Länge der komplexen Zahl z : $r = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2} = 6,32$
- Den Winkel φ berechnen wir in Radiant über $\varphi = \arctan(\frac{y}{x}) + \pi = 4,39$. Beachte, dass die komplexen Zahl z im dritten Quadranten liegt.

Insgesamt erhalten wir $z = -2 - 6j = 6,32 \cdot e^{j4,39}$.

Hier der zugehörige Python Code:

```

import numpy as np

z = -2 - 6j

r = np.abs(z)
print(f"r = {:.2f}")

phi_1 = np.angle(z) # radian!
phi_2 = np.arctan((-6)/(-2)) + np.pi
print(f"{phi_1 = {:.4f}}, {phi_2 = {:.4f}")
print(f"{phi_1 + 2*np.pi = {:.4f}")

phi_2_grad = phi_2*180.0/np.pi
print(f"{phi_2 = {:.4f}}, {phi_2_grad = {:.2f}")

```

```

r = 6.32
phi_1 = -1.8925, phi_2 = 4.3906
phi_1 + 2*np.pi = 4.3906
phi_2 = 4.3906, phi_2_grad = 251.57

```

3.2.3 Wurzeln

Wie lauten die Lösungen der Gleichung $z^5 = 3 - 4j$? Skizzieren Sie die Lage der zugehörigen komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene.

Quelle: [Pap18] Kapitel VII, Abschnitt 2, Aufgabe 8c

Lösung: Siehe Abbildung 3.4.

3.2.4 Wechselstromrechnung

Gegeben sind die beiden gleichfrequenten Wechselspannungen $u_1(t) = -50 \sin(\omega t)$ und $u_2(t) = 200 \sin(\omega t + \frac{\pi}{3})$. Bestimmen Sie mit Hilfe einer Rechnung im Komplexen die durch Superposition entstehende resultierende Wechselspannung.

Quelle: [Pap18] Kapitel VII, Abschnitt 3, Aufgabe 3b

Lösung:

$$\begin{aligned}
 u_1(t) &= \text{Im}(-50 \cdot e^{j\omega t}) \\
 u_2(t) &= \text{Im}\left(200 \cdot e^{j(\omega t + \frac{\pi}{3})}\right) = \text{Im}\left(200e^{j\frac{\pi}{3}} \cdot e^{j\omega t}\right) \\
 -50 + 200e^{j\frac{\pi}{3}} &= -50 + 200 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 200j \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \\
 &\simeq 50 + 173,20j \\
 &= 180,28 \cdot e^{j1,2898}
 \end{aligned}$$

Daher ist $u_1(t) + u_2(t) \simeq 180,28 \sin(\omega t + 1,2898)$. Hier der zugehörige Python Code:

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

```

c) $z^5 = 3 - 4j = 5 \cdot e^{j306,87^\circ} \Rightarrow$
 $r = \sqrt[5]{5} = 1,38, \quad \varphi_k = \frac{306,87^\circ + k \cdot 360^\circ}{5} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4);$
 $z_0 = 1,38 \cdot e^{j61,37^\circ}; \quad z_1 = 1,38 \cdot e^{j133,37^\circ}; \quad z_2 = 1,38 \cdot e^{j205,37^\circ};$
 $z_3 = 1,38 \cdot e^{j277,37^\circ}; \quad z_4 = 1,38 \cdot e^{j349,37^\circ}$

Zeigerdarstellung: Bild A107

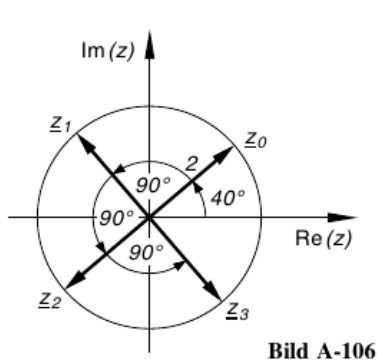


Bild A-106

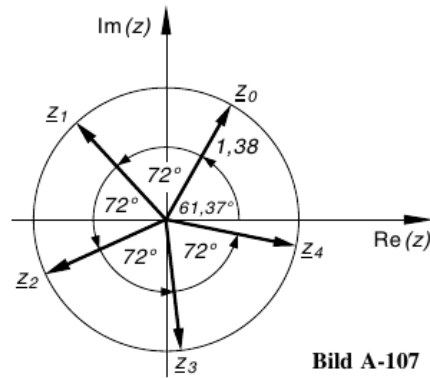


Bild A-107

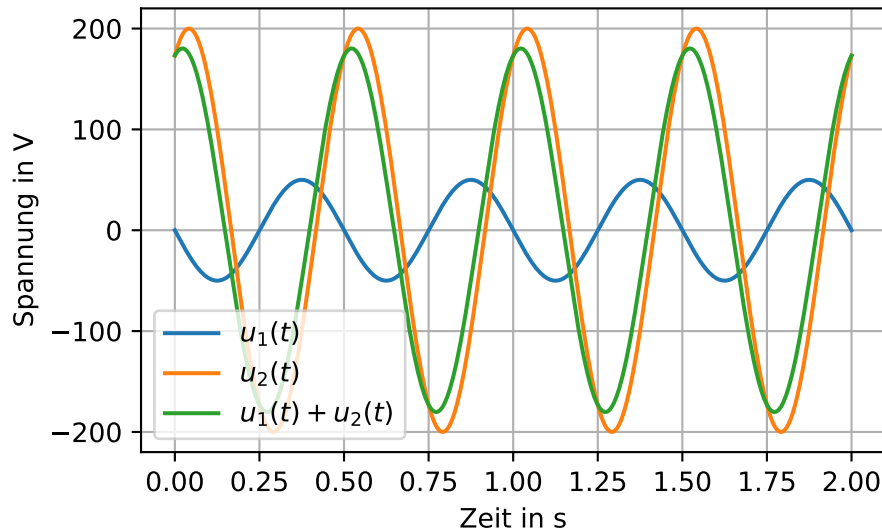
Abbildung 3.4: Quelle: [Pap18] Kapitel VII, Abschnitt 2, Aufgabe 8c

```
omega = 2*np.pi/0.5
t = np.linspace(0, 2, 1000)
u_1 = -50*np.sin(omega*t)
u_2 = 200*np.sin(omega*t + np.pi/3)

plt.figure(figsize=(5, 3))
plt.plot(t, u_1, label="$u_1(t)$")
plt.plot(t, u_2, label="$u_2(t)$")
plt.plot(t, u_1 + u_2, label="$u_1(t) + u_2(t)$")
plt.xlabel("Zeit in s")
plt.ylabel("Spannung in V")
plt.legend()
plt.grid(True)

A = -50 + 200*np.exp(1j*np.pi/3)
a = np.abs(A)
phi = np.angle(A) # radian!
print(f"{a = :.2f}, {phi = :.4f} rad")
```

a = 180.28, phi = 1.2898 rad



3.2.5 Additionstheoreme

Es gibt viele nützliche sogenannte Additionstheoreme, siehe z. B. [Wikipedia](#) und [Pap09] Papula Formelsammlung III, 7.6, S. 95, die sich mit komplexen Zahlen leicht herleiten lassen. Hier ein Beispiel: Wir berechnen die beiden Seiten der Gleichung $e^{j(x+y)} = e^{jx} e^{jy}$, und setzen danach die Real- und Imaginärteile gleich.

$$\begin{aligned}
 e^{j(x+y)} &= \cos(x+y) + j \sin(x+y) \\
 e^{jx} e^{jy} &= [\cos(x) + j \sin(x)] \cdot [\cos(y) + j \sin(y)] = \\
 &= \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y) + j [\sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)]
 \end{aligned}$$

- Gleichheit der Realteile liefert das Additionstheorem $\cos(x+y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$.
- Gleichheit der Imaginärteile liefert das Additionstheorem $\sin(x+y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$.

3.2.6 Eulersche Zahl

Wir approximieren die [Eulersche Zahl](#) $e = 2,7182818 \dots$ mittels der Potenzreihe $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ der Exponentialfunktion auf 5 Kommastellen genau. Für die Definition von $n!$ siehe z. B. [Wikipedia](#).

Lösung: $e = e^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots$

```

import math

e_approx = 0
for k in [1,2,3,4,5,6,7,8]:
    e_approx = e_approx + 1/math.factorial(k)
print(f"e approximiert = {e_approx:.5f}")
print(f"e exakt       = {np.exp(1):.5f}...")

```

```

e approximiert = 1.71828
e exakt       = 2.71828...

```

3.3 Aufgaben

3.3.1 Darstellungsformen

1. Rechnen Sie die in der kartesischen Form gegebene komplexe Zahl $z = -3 + 5j$ in die Polarform um. Wie lautet die konjugiert komplexe Zahl \bar{z} in der kartesischen und in der Polarform?
2. Bringen Sie die in der Polarform vorliegende komplexe Zahl $z = 3e^{j30^\circ}$ in die kartesische Form und bestimmen Sie die konjugiert komplexe Zahl von z .

Quellen:

1. [Pap18] Kapitel VII, Abschnitt 1, Aufgabe 4
2. [Pap18] Kapitel VII, Abschnitt 1, Aufgabe 5

3.3.2 Polarform

Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Polarform dar:

1. $z = \frac{6+8j}{4-3j}$
2. $z = \frac{3+\sqrt{2}j}{-\sqrt{2}-\frac{2}{3}j}$

3.3.3 Kartesische Form

Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der kartesischen Form dar:

1. $z = \sqrt{8} (\cos(\frac{\pi}{4}) + j \sin(\frac{\pi}{4}))$
2. $z = \sqrt{50} (\cos(\frac{3\pi}{4}) + j \sin(\frac{3\pi}{4}))$

3.3.4 Kartesisch Rechnen

1. Berechnen Sie mit den komplexen Zahlen $z_1 = -4j$, $z_2 = 3 - 2j$, $z_3 = -1 + j$ den Ausdruck $\frac{z_1^* \cdot z_2}{z_3}$.
2. Berechnen Sie den folgenden Ausdruck, und geben Sie das Endergebnis in kartesischer Form an: $\frac{2j}{3-4j} + 2e^{j(-30^\circ)} + 3 [\cos(\pi/4) + j \sin(\pi/4)]$.

Quelle: [Pap18] Kapitel VII, Abschnitt 2, Aufgaben 1c und 3a

3.3.5 Real- und Imaginärteil

Berechnen Sie den Realteil und den Imaginärteil von $z = \frac{(1+j)^2}{3+2j}$

3.3.6 Real- und Imaginärteil

Berechnen Sie für $x = x + jy$ folgende Größen:

1. $\operatorname{Re}(z^3)$
2. $\operatorname{Im}(z^4)$
3. $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z^2}\right)$
4. $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z^2}\right)$

3.3.7 Kartesisch Rechnen und Potenzieren

1. Bringen Sie den folgenden Ausdruck in kartesische Form: $\frac{4(3-j)^*}{(1+j)(-1+j)}$.
2. Berechnen Sie $(3-\sqrt{3}j)^4$, und stellen Sie das Ergebnis in der kartesischen und in der Polarform dar.
3. Berechnen Sie $(-4-3j)^3$, und stellen Sie das Ergebnis in der kartesischen und in der Polarform dar.

Quelle: [Pap18] Kapitel VII, Abschnitt 2, Aufgaben 2c, 6b und 6d

3.3.8 Kartesisch Rechnen und Potenzieren

1. Bestimmen Sie von $(2-4j)^2 + \frac{|1-\sqrt{3}j|}{j}$ den Real- und den Imaginärteil.
2. Berechnen Sie $(3e^{j\pi})^5$, und stellen Sie das Ergebnis in der kartesischen und in der Polarform dar.

Quelle: [Pap18] Kapitel VII, Abschnitt 2, Aufgaben 2d und 6f

3.3.9 Darstellungsformen und Potenzieren

1. Die in der kartesischen Form gegebene komplexe Zahl $z = -4j$ ist in Polarform umzurechnen. Wie lautet die konjugiert komplexe Zahl in der kartesischen und in der Polarform?
2. Berechnen Sie $\left[2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right]^{10}$, und stellen Sie das Ergebnis in der kartesischen und in der Polarform dar (Winkel als Hauptwert).

3.3.10 Wurzeln

1. Wie lauten die Lösungen der Gleichung $z^3 = 2 + 2j$?
2. Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $z^2 = -3 + 4j$
 1. in Polarform.
 2. in kartesischer Form mit der Formel $z_{0,1} = \pm \left(\sqrt{\frac{|a|+x}{2}} + j \cdot \operatorname{sgn}(y) \sqrt{\frac{|a|-x}{2}} \right)$.

3.3.11 Quadratwurzeln

Berechnen Sie die Quadratwurzeln der folgenden komplexen Zahlen z , und machen Sie die Probe:

1. $z = 1 - j\sqrt{3}$
2. $z = -5 + 12j$

3.3.12 Wurzeln

1. Bestimmen Sie alle dritten Wurzeln von $1 + j$ in Polarform und in kartesischer Form.
2. Bestimmen Sie alle fünften Wurzeln von -1 in Polarform und in kartesischer Form.

3.3.13 Quadratische Gleichung

Lösen Sie die folgende quadratische Gleichung in \mathbb{C} , und machen Sie die Probe:

$$z^2 - 3z + 3 = j$$

3.3.14 Algebraische Gleichung

Lösen Sie die folgende quadratische Gleichung in \mathbb{C} , und machen Sie die Probe:

$$z^4 - 3(1 + 2j)z^2 - 8 + 6j = 0$$

3.3.15 Wechselstromrechnung

Die gleichfrequenten harmonischen Schwingungen

$$y_1 = 20 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$y_2 = 15 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$$

werden zur Überlagerung gebracht. Wie lautet die resultierende Schwingung in der Kosinusform?

Quelle: [Pap18] Kapitel VII, Abschnitt 3, Aufgabe 5

3.3.16 Wechselstromrechnung

Gegeben sind die beiden gleichfrequenten Wechselspannungen $u_1(t)$ und $u_2(t)$. Bestimmen Sie die durch Superposition entstehende resultierende Wechselspannung $u_1(t) + u_2(t)$ mit Hilfe der komplexen Rechnung:

$$u_1(t) = 100 \sin(\omega t)$$

$$u_2(t) = 150 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Quelle: [Pap18] Kapitel VII, Abschnitt 3, Aufgabe 3a

3.3.17 Eulersche Formel

Setze $x = j\varphi$ in die Potenzreihe $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ der Exponentialfunktion ein, und vergleiche das Ergebnis mit den Potenzreihen von Sinus und Kosinus:

$$\begin{aligned}\sin(\varphi) &= \frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots \\ \cos(\varphi) &= \frac{\varphi^0}{0!} - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots\end{aligned}$$

SchlieÙe daraus die Eulersche Formel $e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi)$.

3.3.18 Mehr Aufgaben

- [Pap18] Kapitel VII:
 - Abschnitt 1: Aufgaben 2, 3, 4, 5, 6, 7
 - Abschnitt 1: Aufgaben 1 - 6, 8 - 10, 13
 - Abschnitt 3: Aufgaben 1 - 9
- [Pap20]: Kapitel H Komplexe Zahlen und Funktionen, Abschnitt 1 Komplexe Rechnung: H1 - H7, H9 - H12, H17 - H18, H20 - H22
- [Pap19]: Kapitel VI Komplexe Zahlen und Funktionen, Beispiele 1 - 7

4 Differentialrechnung

4.1 Methoden

💡 Motivation

Oft ist nicht (nur) der Wert einer Größe y in Abhängigkeit einer anderen Größe x interessant sondern die Änderung der Outputgröße y im Verhältnis zur Änderung der Inputgröße x . Man arbeitet dann mit Begriffen wie (Änderungs-)Rate, Geschwindigkeit, Trend, Steigung, Preis, Fluss, spezifische Größe, (z. B. Wärme-)Kapazität, Ableitung, partielle Ableitung, totale Ableitung, Differential, Gradient, etc..

Hier eine Auswahl an Anwendungen der Differentialrechnung:

- Physik, Chemie, Technik: Mechanik, Thermodynamik, Elektrodynamik etc.
- Beschreibung von kontinuierlichen dynamischen Systemen in Natur, Technik und Wirtschaft durch gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen
- Beschreibung von Änderungsraten
- lineare Approximation von Funktionen
- Taylorreihe: polynomiale Approximation von Funktionen
- Nicht-lineare Optimierung
- Variationsrechnung, Theorie der optimalen Steuerungen
- Numerisches Lösen von nicht-linearen Gleichungen und Gleichungssystemen

Zur Geschichte der Differentialrechnung hier ein kurzer Auszug aus [Wikipedia](#): “Ende des 17. Jahrhunderts gelang es Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz mit unterschiedlichen Ansätzen unabhängig voneinander, widerspruchsfrei funktionierende Kalküle zu entwickeln. Während Newton das Problem physikalisch über das Momentangeschwindigkeitsproblem anging, löste es Leibniz geometrisch über das Tangentenproblem.”

4.1.1 Lineare Approximation

Wir approximieren die **Änderung des Funktionswertes** einer Funktion bei einer bestimmten Stelle (Inputwert, Arbeitspunkt) in linearer Weise. Die lineare und polynomiale Approximation der Funktion selbst folgt später, siehe Tangente und Taylorreihe.

Wir beschreiben die Methodik am Beispiel der Funktion $y = f(x) = x^2$, und bestimmen die lineare Approximation der Funktionswertänderung bei $x_0 = 1$ bei einer Inputänderung von $\Delta x = 1$. In [Abbildung 4.1](#) ist die Funktion, die Stelle, die Inputänderung Δx , sowie die exakte (Δy) und die linear approximierte (dy) Funktionswertänderung dargestellt.

Nomenklatur:

- x_0 ist die Stelle (Argument, Inputwert, Arbeitspunkt), an der die Änderung der Funktion linear approximiert wird.

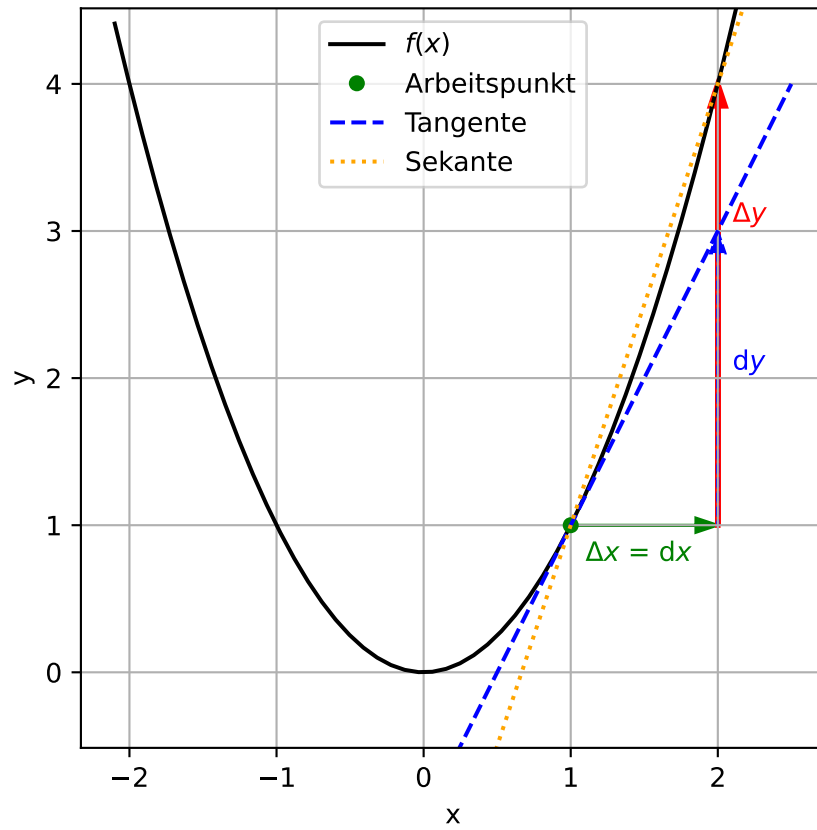


Abbildung 4.1: Lineare Approximation der Funktionswertänderung am Beispiel $y = f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 1$.

- Δx ist die frei gewählte Differenz (Änderung) der unabhängigen Inputgröße (Variablen) x bei x_0 .
- dx ist die lineare Approximation von Δx , genannt das unabhängige **Differential**. Da x keine Funktion einer anderen Größe ist, d. h. x ist eine unabhängige Variable, ist die Approximation fehlerfrei und man erhält $dx = \Delta x$. Wir schreiben vorwiegend dx .
- Δy ist die exakte Differenz (Änderung) der Outputgröße y bei Änderung der Inputgröße um Δx bei x_0 .
- dy ist die lineare Approximation von Δy , genannt das abhängige **Differential**, oft auch df geschrieben.

4.1.2 Erste Ableitung

Die exakte Differenz berechnet sich als $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ und hängt im allgemeinen nicht-linear von Δx ab. Die lineare Approximation dieser Abhängigkeit ist von der Form $dy = k dx$ für eine bestimmte Zahl k , vgl. die Geradengleichung $y = kx + d$ mit $d = 0$, weil $\Delta y = 0$ bei $\Delta x = 0$. Die Zahl k heißt **die erste Ableitung der Funktion f bei x_0** und wird als $f'(x_0)$ geschrieben:

$$dy = f'(x_0) dx$$

Durch Umformen folgt $f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$, vgl. Abbildung 4.1.

Bemerkungen:

- Für nicht-lineare Funktionen gilt im Allgemeinen $\Delta y \neq dy$.
- Für lineare Funktionen gilt immer $\Delta y = dy$.
- Je kleiner dx umso besser approximiert dy den wahren Wert Δy .

Die erste Ableitung $f'(x_0)$ der Funktion f bei x_0 gibt die Änderungsrate von f bei x_0 pro x -Einheit an und entspricht der **Steigung der Tangente** an den Graphen von f bei x_0 . Wird die Stelle x_0 nicht spezifiziert, so erhält man die erste Ableitung als Funktion von x und schreibt $f'(x)$ oder kurz f' . Oft wird auch $y'(x_0)$, $y'(x)$, y' , $\dot{y}(x_0)$, $\dot{y}(x)$, oder \dot{y} sowie $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$ etc. verwendet.

Die erste Ableitung (die Steigung der Tangente) $f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$ ist der Grenzwert des **Differenzenquotienten** (der Steigung der Sekante) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ für $\Delta x \rightarrow 0$:

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Der Quotient $\frac{dy}{dx}$ wird **Differentialquotient** genannt.

Beispiel: Wir berechnen zuerst den Differenzenquotienten der Funktion $f(x) = x^2$ bei einem x_0 :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} \\ &= \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} \\ &= \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\ &= 2x_0 + \Delta x \end{aligned}$$

Zur Berechnung der ersten Ableitung $f'(x_0)$ bestimmen wir den Grenzwert des Differenzenquotienten für $\Delta x \rightarrow 0$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

Da x_0 beliebig war, können wir dieses Resultat auch in der bekannteren Form $f'(x) = 2x$ schreiben, oder kurz $(x^2)' = 2x$.

Ableitung elementarer Funktionen:

Die Ableitungen in Tabelle 4.1 auswendig zu können, ist sehr hilfreich.

Tabelle 4.1: Ableitung elementarer Funktionen

$f(x)$	$f'(x)$
Konstante k	0
Potenzfunktion x^n	nx^{n-1}
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$

Für alle weiteren Funktionen reicht es zu wissen, dass und wo man ihre Ableitung in Tabellen wie Tabelle 4.2 nachschlagen kann.

Tabelle 4.2: Ableitung weiterer Funktionen

$f(x)$	$f'(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)} = -(1 + \cot^2(x))$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$

Noch mehr Ableitungstabellen finden Sie in der Literatur und im Internet, z. B. in [Wikipedia](#) und in [\[Pap18\]](#).

Ableitungsregeln:

Mit den Ableitungstabellen und den folgenden Ableitungsregeln lassen sich die auch zusammengesetzte Funktionen problemlos ableiten.

- **Faktorregel:** Für jede Konstante c gilt:

$$[cf]'(x) = cf'(x)$$

Beispiel: $(3x^2)' = 3(x^2)' = 3 \cdot 2x = 6x$

- **Summenregel:**

$$[f + g]'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Beispiel: $[\sin(x) + e^x]' = [\sin(x)]' + (e^x)' = \cos(x) + e^x$

- **Produktregel:**

$$[f \cdot g]'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Beispiel: $[\sin(x) \cdot e^x]' = \cos(x) \cdot e^x + \sin(x) \cdot e^x$

- **Quotientenregel:**

$$\left[\frac{f}{g}\right]'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Beispiel: $\left[\frac{\sin(x)}{e^x}\right]' = \frac{\cos(x) \cdot e^x - \sin(x) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{\cos(x) - \sin(x)}{e^x}$

- **Kettenregel:**

$$[f \circ g]'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Beispiel: $[\sin(3x^2 + 4x)]' = \cos(3x^2 + 4x) \cdot (6x + 4)$

4.1.3 Monotonie und Krümmung

Aus der ersten Ableitung $f'(x)$ kann man auf die **Monotonie** der Funktion schließen, siehe Abbildung 4.2:

- Ist bei x_0 die erste Ableitung $f'(x_0) > 0$, dann wächst f bei x_0 streng monoton.
- Ist bei x_0 die erste Ableitung $f'(x_0) < 0$, dann fällt f bei x_0 streng monoton.

Die erste Ableitung $f'(x)$ kann als Funktion von x wieder abgeleitet werden. Man erhält die zweite Ableitung $f''(x)$, die geometrisch die **Krümmung** des Funktionsgraphen an jeder Stelle x angibt, siehe Abbildung 4.2:

- Ist bei x_0 die zweite Ableitung $f''(x_0) > 0$, dann ist f bei x_0 linksgekrümmt.
- Ist bei x_0 die zweite Ableitung $f''(x_0) < 0$, dann ist f bei x_0 rechtsgekrümmt.

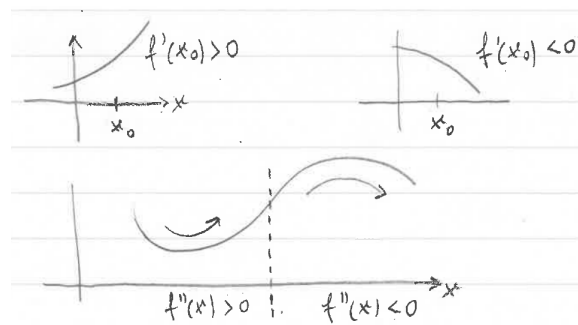


Abbildung 4.2: Monotonie und Krümmung

Eine Stelle x_0 , bei der sich die Krümmung (der Drehsinn) ändert, heißt **Wendepunkt**. Wendepunkte mit waagrechter Tangente heißen **Sattelpunkte**, siehe Abbildung 4.3.

Hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt: $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0 \implies x_0$ ist ein Wendepunkt.

Achtung: Die Umkehrung gilt nicht! Zum Beispiel hat die Funktion $f(x) = x^5$ bei $x_0 = 0$ einen Wendepunkt und $f''(x_0) = 0$, aber $f'''(x_0) = 0$.

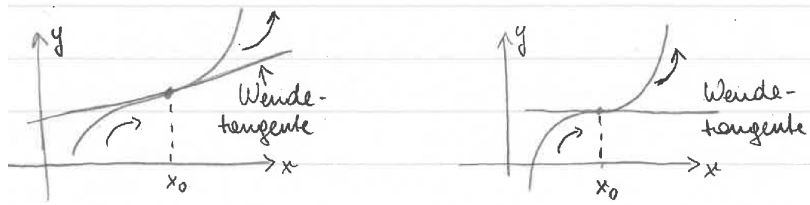


Abbildung 4.3: Wendepunkt und Sattelpunkt

4.1.4 Relative Extremwerte

Eine Funktion f besitzt bei x_0 ein relatives (=lokales) Maximum bzw. relatives Minimum, wenn in einer Umgebung von x_0 folgendes gilt:

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{bzw.} \quad f(x_0) \leq f(x)$$

für alle x der Umgebung. Relative Maxima und Minima heißen relative Extremwerte der Funktion.

Notwendige Bedingung (notwendiges Optimalitätskriterium) für einen relativen Extremwert: x_0 ist relativer Extremwert von $f \implies f'(x_0) = 0$, d. h. waagrechte Tangente bei x_0 .

Achtung: Die Umkehrung gilt nicht! Zum Beispiel hat die Funktion $f(x) = x^3$ bei $x_0 = 0$ zwar eine waagrechte Tangente aber keinen relativen Extremwert.

Hinreichende Bedingung (hinreichendes Optimalitätskriterium) für einen relativen Extremwert:

- $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0 \implies f$ hat bei x_0 ein relatives Minimum.
- $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0 \implies f$ hat bei x_0 ein relatives Maximum.

Achtung: Auch hier gilt die Umkehrung nicht! Zum Beispiel hat die Funktion $f(x) = x^4$ bei $x_0 = 0$ ein relatives Minimum, aber $f''(x_0) = 0$.

Höhere Ableitungen brauchen wir auch. Man schreibt die n -te Ableitung von f für große n gerne als $f^{(n)}$.

In Abbildung 4.4 sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für relative Extremwerte als Mengendiagramm zusammengefasst.

Allgemeines Kriterium für einen relativen Extremwert: Sei $f'(x_0) = 0$ und die nächste nichtverschwindende (=nicht-Null) Ableitung bei x_0 sei die n -te Ableitung $f^{(n)}(x_0)$ mit $n > 1$. Dann ist x_0 ein relativer Extremwert, wenn n gerade ist, und es gilt dann:

- x_0 ist ein relatives Minimum, falls $f^{(n)}(x_0) > 0$.
- x_0 ist ein relatives Maximum, falls $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Ist n ungerade, dann ist x_0 ein Sattelpunkt.

Extremwertaufgaben:

- Die zu maximierende oder minimierende Zielfunktion hängt typischerweise von zwei Inputgrößen ab. Durch eine Nebenbedingung kann die Zielfunktion auf eine Inputgröße reduziert werden.
- Die resultierende Zielfunktion ist typischerweise nur auf einem Intervall definiert. Die inneren relativen Extremwerte werden mittels Differentialrechnung bestimmt. Diese werden mit den Funktionswerten an den Randpunkten des Intervalls verglichen.

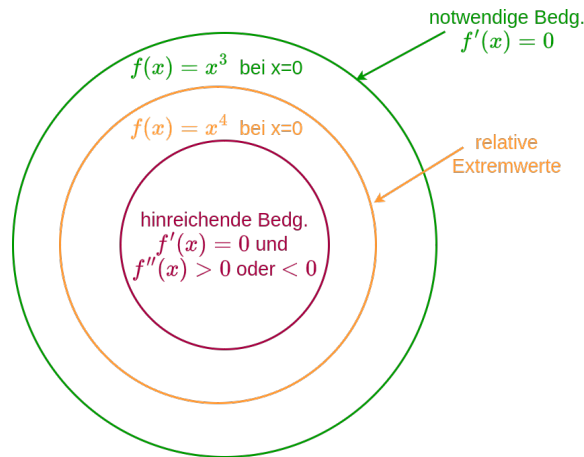


Abbildung 4.4: Notwendige und hinreichende Bedingungen für relative Extremwerte als Mengendiagramm

Eine **Kurvendiskussion** beinhaltet: Definitionsbereich, Bildmenge, Graph, Symmetrie, Nullstellen, Pole, relative Extremwerte, Wendepunkte, Sattelpunkte, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$, [Asymptoten](#).

4.1.5 Taylorreihe

Wir betrachten eine Funktion $f(x)$ mit einer Inputvariablen x . Der Funktionswert kann in der Umgebung einer frei gewählten Inputstelle x_0 mittels der sogenannten Taylorreihe(nentwicklung) durch ein Polynom k -ter Ordnung approximiert werden, sodass der Funktionswert und alle Ableitungen bis inkl. k -ter Ordnung bei x_0 übereinstimmen.

- Beispiel: Taylorreihe dritter Ordnung, d. h. Polynom dritter Ordnung:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \text{Fehler}$$

Überprüfen Sie durch Ableiten dieser Gleichung, dass der Funktionswert und die Ableitungen bis inkl. dritter Ordnung bei x_0 übereinstimmen.

- Die Taylorreihe 1. Ordnung entspricht der Tangente an den Graphen von f bei x_0 :

$$f_{\text{Tang.}}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

- Die Taylorreihe 2. Ordnung entspricht der Schmiegeparabel an den Graphen von f bei x_0 :

$$f_{\text{Parab.}}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

- unendliche Taylorreihe:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k.$$

Beispiele:

- Exponentialfunktion bei $x_0 = 0$: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

- Sinus bei $x_0 = 0$: $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$, siehe Abbildung 4.5
- Kosinus bei $x_0 = 0$: $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$
- vgl. $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$
- siehe [Wikipedia](#)

```

x = np.linspace(-4, 4, num=100)
def f_1(x):
    return x
def f_3(x):
    return x - 1/(3*2*1)*x**3
def f_5(x):
    return x - 1/(3*2*1)*x**3 + 1/(5*4*3*2*1)*x**5

plt.figure(figsize=(5, 4))
plt.plot(x, np.sin(x), linewidth=3, label="\sin(x)")
plt.plot(x, f_1(x), label="f_1(x)")
plt.plot(x, f_3(x), label="f_3(x)")
plt.plot(x, f_5(x), label="f_5(x)")
plt.xlabel("$x$")
plt.legend()
plt.grid(True)

```

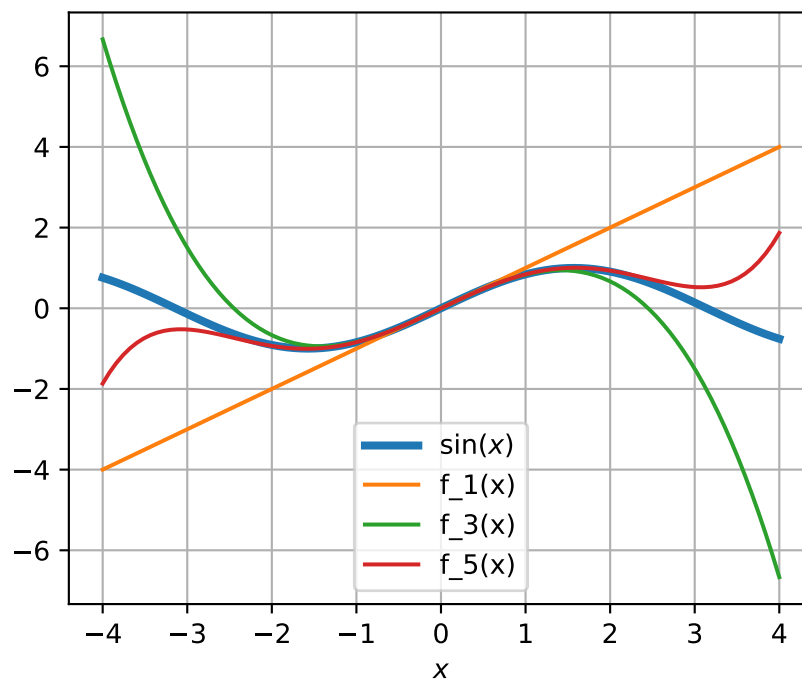


Abbildung 4.5: Taylorreihe der Sinusfunktion bei $x_0 = 0$.

4.1.6 Grenzwertregeln

Beispiel: Der $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ lässt sich nicht direkt berechnen, da $e^0 - 0 = 0$ und somit der Bruch bei $x = 0$ von der undefinierten Form " $\frac{0}{0}$ " ist. Der Grenzwert lässt sich aber mit den Grenzwertregeln von Bernoulli und de L'Hospital berechnen, die mit Hilfe der Taylorreihe wie folgt für den Typ " $\frac{0}{0}$ " herleitbar sind.

Seien f und g zwei Funktion, die beide bei x_0 eine Nullstelle haben. Dann lässt sich ihr Quotient so umformen:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots}{g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}g''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots} = \\ &= \frac{f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots}{g'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}g''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots} = \\ &= \frac{f'(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0) + \dots}{g'(x_0) + \frac{1}{2}g''(x_0)(x - x_0) + \dots} \end{aligned}$$

Dabei wurde verwendet, dass $f(x_0) = 0$ und $g(x_0) = 0$ sind. Zudem wurde von der zweiten auf die dritte Zeile durch $x - x_0$ gekürzt. Falls $g'(x_0) \neq 0$, kann man im letzten Bruch $x = x_0$ setzen und erhält $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Fortsetzung des Beispiels: $x_0 = 0$, $f(x) = e^x - 1$, $g(x) = x$, $f'(x) = e^x$, $g'(x) = 1$, $f'(x_0) = e^0 = 1$, $g'(x_0) = 1$. Daher ist $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{1} = 1$.

Allgemeinere **Grenzwertregel** von Bernoulli und de L'Hospital: Falls $\frac{f(x)}{g(x)}$ vom Typ " $\frac{0}{0}$ " oder " $\frac{\infty}{\infty}$ " ist, dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bemerkungen:

- Diese allgemeinere Grenzwertregel gilt auch für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$.
- Eventuell ist es bei einer Grenzwertberechnung notwendig, die Regel mehrmals hintereinander anzuwenden.
- Andere Typen lassen sich oft auf " $\frac{0}{0}$ " oder " $\frac{\infty}{\infty}$ " umformen, siehe z. B. Kapitel VI, Abschnitt 3.3.3, Tabelle 3 in [Pap18] auf Seite 627.

4.1.7 Ableitung einer Kurve

Eine (parametrisierte) **Kurve** (ein Weg) in der Ebene \mathbb{R}^2 ist eine Funktion

$$\begin{aligned} s : I \subseteq \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto s(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dabei ist I ein Intervall, das auch ganz \mathbb{R} umfassen kann. Zum Beispiel könnte die Inputgröße (der Parameter) t die Zeit und der Outputvektor der Ort eines Objekts in der Ebene (Landkarte) zum Zeitpunkt t sein.

Beispiele:

- gleichförmige geradlinige Bewegung (Gerade): $s(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - t \\ 2 + 2t \end{pmatrix}$

- Kreisbewegung um den Ursprung mit Radius r und Winkelgeschwindigkeit ω : $s(t) = r \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}$

Eine Kurve im Raum \mathbb{R}^3 ist ganz analog eine Funktion $s(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

Die erste Ableitung $s'(t)$ einer Kurve $s(t)$ entsteht durch Ableiten der einzelnen Komponenten nach der Inputgröße. Für eine Kurve in der Ebene bedeutet das $s'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$. Falls die Inputgröße t die Zeit und der Outputvektor den Ort eines Objekts beschreiben, dann ist $s'(t)$ die Geschwindigkeit und $s''(t)$ die Beschleunigung des Objekts zum Zeitpunkt t . In der Physik wird die Geschwindigkeit oft mit $\dot{s}(t)$ und die Beschleunigung mit $\ddot{s}(t)$ bezeichnet.

4.1.8 Partielle Ableitungen

Oft hängt eine Outputgröße z nicht nur von einer Inputgröße x ab sondern von mehreren, z. B. von zwei Inputgrößen x und y ab. Man schreibt dann $z(x, y)$.

Beispiele:

- Die kinetische Energie K eines Massenpunktes hängt von seiner Masse m und von seiner Geschwindigkeit v ab: $K(m, v) = m \frac{v^2}{2}$.
- Das Volumen V einer Konservendose hängt vom Radius der Boden- bzw. Deckfläche und von der Höhe h der Dose ab: $V(r, h) = \pi r^2 h$.
- Die Länge r eines Vektors hängt von seinen beiden kartesischen Koordinaten x und y ab: $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Oft betrachtet man die Abhängigkeit der Outputgröße $z(x, y)$ vorübergehend nur von einer Inputgröße, z. B. x , und die andere Inputgröße y als konstant, z. B. ein Fahrzeug mit konstanter Masse m und variabler Geschwindigkeit v , oder unterschiedlich schwere Fahrzeuge bei gleicher, konstanter Geschwindigkeit. Wenn man dann die Outputgröße z z. B. nach der Variablen x ableitet, während man y als konstant betrachtet, erhält man die sogenannte partielle Ableitung $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$ von z nach x . Sie gibt die Änderungsrate von z bei pro x -Einheit bei dem gewählten y -Wert an. Analog ist die partielle Ableitung $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$ definiert.

Fortsetzung der Beispiele:

- $\frac{\partial K}{\partial m}(m, v) = \frac{v^2}{2}$, $\frac{\partial K}{\partial v}(m, v) = mv$
- $\frac{\partial V}{\partial r}(r, h) = 2\pi r h$, $\frac{\partial V}{\partial h}(r, h) = \pi r^2$
- $\frac{\partial r}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r}$

4.2 Beispiele

4.2.1 Tangentengleichung

Wir bestimmen die Tangente an die Funktion $y = \ln(x)$ bei $x = 1$. Die Tangente ist eine Gerade und kann daher mit der Geradengleichung $y_{\text{Tang.}} = kx + d$ angesetzt werden. Die Steigung k der Tangente ist die erste Ableitung $y'(x) = \frac{1}{x}$ an der Stelle $x = 1$: $y'(1) = \frac{1}{1} = 1$. An der Stelle $x = 1$

hat die Funktion den Wert $y(1) = \ln(1) = 0$. Die Tangente $y_{\text{Tang.}} = x + d$ geht auch durch diesen Punkt, d. h.: $0 = 1 + d$. Daher ist $d = -1$, und die Tangentengleichung lautet $y_{\text{Tang.}} = x - 1$.

Wir überprüfen unser Ergebnis mittels eines Plots, siehe Abbildung 4.6:

```
x = np.linspace(0.1, 3, num=500)
y = np.log(x)
y_tang = x - 1

plt.figure(figsize=(5, 3))
plt.plot(x, y, label='y')
plt.plot(x, y_tang, label='Tangente')
plt.xlabel('$x$')
plt.ylabel('$y$')
plt.legend()
plt.grid(True)
```

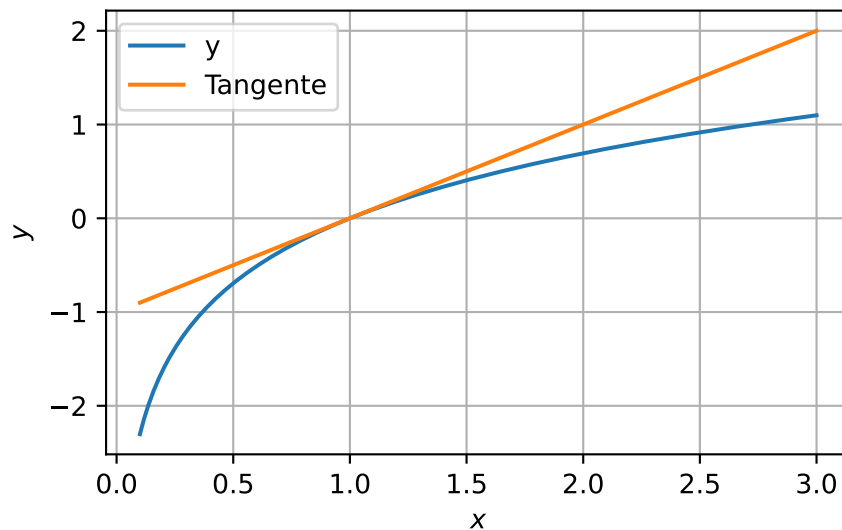


Abbildung 4.6: Tangente an $\ln(x)$ bei $x = 1$.

Die Tangente an eine Funktion bei einer bestimmten Stelle wird auch als **Linearisierung** der Funktion an dieser Stelle bezeichnet.

4.2.2 Minimaler Abfall

Aus einem Baumstamm mit kreisförmigem Querschnitt soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt gefertigt werden, und zwar so, dass möglichst wenig Abfall entsteht. Siehe Abbildung 4.7.

Formulieren Sie die Aufgabe mathematisch, und bestimmen Sie den optimalen Querschnitt.

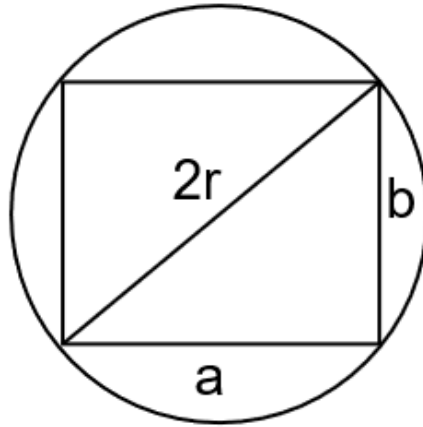


Abbildung 4.7: Minimaler Abfall bei der Fertigung eines Balkens aus einem Baumstamm

Lösung: Wir maximieren Sie die Fläche des Rechtecks, die innerhalb des kreisförmigen Querschnitts liegt.

$$\begin{aligned}
 A_{\text{Kreis}} &= \pi r^2 \\
 A_{\text{Rechteck}}(a, b) &= ab \\
 2r &= \sqrt{a^2 + b^2} \\
 a &= \sqrt{4r^2 - b^2} \\
 A_{\text{Rechteck}}(b) &= \sqrt{4r^2 - b^2}b = \sqrt{4r^2b^2 - b^4} \\
 \frac{dA_{\text{Rechteck}}}{db}(b) &= \frac{8r^2b - 4b^3}{2\sqrt{4r^2b^2 - b^4}} = 0 \\
 8r^2b &= 4b^3 \\
 b &= \sqrt{2}r \\
 \frac{d^2A_{\text{Rechteck}}}{db^2} &= 2b \frac{b^2 - 6r^2}{\sqrt{(4r^2 - b^2)^3}} \\
 \frac{d^2A_{\text{Rechteck}}}{db^2} \Big|_{b=\sqrt{2}r} &= -4 \\
 a &= \sqrt{4r^2 - 2r^2} = \sqrt{2}r = b
 \end{aligned}$$

Man hätte durch folgende Überlegungen die Rechnungen vereinfachen können:

1. Die gesuchten relativen Extremwerte der Funktion $A_{\text{Rechteck}}(b) = \sqrt{4r^2 - b^2}b = \sqrt{4r^2b^2 - b^4}$ sind dieselben der einfacher zu abzuleitenden Funktion $f(b) = 4r^2b - b^3$, denn $A_{\text{Rechteck}}(b) = \sqrt{f(b)}$, und die Wurzelfunktion ist streng monoton steigend.
2. Die Aufgabe lässt sich noch einfacher lösen, indem man folgendes Symmetrieargument verwendet: Das Problem ist rotationssymmetrisch bzgl. beliebigen Rotationen um die Baumstammachse, d. h. es muss $a = b$ gelten. Daher ist $2r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2a^2}$, und somit $a = b = \sqrt{2}r$.

4.2.3 Maximale Querschnittsfläche

Der Querschnitt eines Tunnels besteht aus einem Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis, siehe Abbildung. Wie müssen die Abmessungen (x, y) gewählt werden, damit bei vorgegebenem Umfang U des

Tunnelquerschnitts die Querschnittsfläche des Tunnels möglichst groß wird?

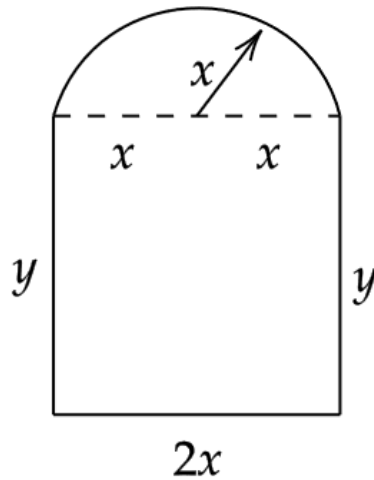


Abbildung 4.8: Maximale Querschnittsfläche eines Tunnels

Lösung:

$$A(x, y) = 2xy + \frac{1}{2}\pi x^2$$

$$U = 2x + 2y + \pi x \implies y = \frac{U - 2x - \pi x}{2}$$

$$A(x) = xU - 2x^2 - \frac{\pi x^2}{2}$$

$$\frac{dA}{dx}(x) = U - 4x - \pi x = 0 \implies x = \frac{U}{4 + \pi}$$

$$\text{Einsetzen in } U = 2x + 2y + \pi x \implies y = \frac{U}{4 + \pi} = x$$

4.2.4 Taylorreihe des Gravitationalspotentials

1. Berechnen Sie die Taylorreihe des Gravitationalspotentials $\phi(r) = -G\frac{mM_E}{r}$ eines Körpers der Masse m an der Erdoberfläche bis zur ersten Ordnung.
2. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der bekannten Formel mgh , wobei $g = 9,81\frac{m}{s^2}$ die Erdbeschleunigung und h die Höhe über der Erdoberfläche sind.
3. Erstellen Sie einen Plot des wahren und approximierten Gravitationalspotentials in der Nähe der Erdoberfläche am Computer.

Daten: Gravitationskonstante $G = 6,6742 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2}$, Masse der Erde $M_E = 5,974 \cdot 10^{24} kg$, Durchmesser der Erde $d = 12714 km$

Lösung:

1. Taylorreihe bis 1. Ordnung: $\phi(r_E + h) \simeq \phi(r_E) + \phi'(r_E)h = -G\frac{mM_E}{r_E} + G\frac{mM_E}{r_E^2}h$
2. Der erste Term ist eine Konstante und daher für die potentielle Energie irrelevant. Wir vergleichen den zweite Term $G\frac{mM_E}{r_E^2}h$ mit mgh . Der Term $G\frac{M_E}{r_E^2}$ hat einen Wert von $9,87\frac{m}{s^2}$ und ist somit vergleichbar mit $g = 9,81\frac{m}{s^2}$.

3. Siehe Code.

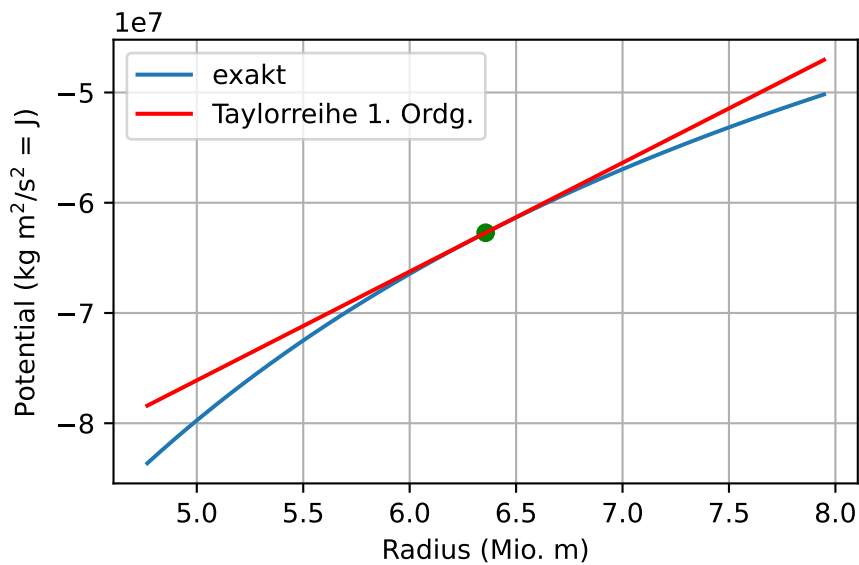
```
G = 6.6742e-11 # m^3/(kg*s)
ME = 5.974e24 # kg
rE = 12714.0e3/2 # m
g = G*ME/rE**2 # m/s^2

print(f"{rE = :.3f} m")
print(f"{g = :.3f} m/s^2")

m = 1
r = np.linspace(rE*0.75, rE*1.25)

plt.figure(figsize=(5, 3))
plt.plot(r/1e6, -G*m*ME/r, label='exakt')
plt.plot(rE/1e6, -G*m*ME/rE, 'go')
plt.plot(r/1e6, -G*m*ME/rE + g*m*(r - rE), 'r', label='Taylorreihe 1. Ordg.')
plt.legend(loc='best')
plt.xlabel('Radius (Mio. m)')
plt.ylabel('Potential (kg m^2/s^2 = J)')
plt.grid(True)
```

```
rE = 6357000.000 m
g = 9.866 m/s^2
```



4.2.5 Limesberechnung

Wir berechnen $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$ mit den Grenzwertregeln von Bernoulli und de L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

4.2.6 Ableitungen der Kreisbewegung

Wir betrachten die Kreisbewegung um den Ursprung mit Radius r und Winkelgeschwindigkeit ω :

$$s(t) = r \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die Geschwindigkeit $s'(t)$ und die Beschleunigung $s''(t)$:

$$s'(t) = r\omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$
$$s''(t) = -r\omega^2 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} = -\omega^2 s(t)$$

Abbildung 4.9 zeigt alle drei Kurven: den Ort $s(t)$, die Geschwindigkeit $s'(t)$ und die Beschleunigung $s''(t)$.

```
r = 2 # Radius
T = 10 # Umlaufdauer in Sekunden
omega = 2*np.pi/T

plt.figure(figsize=(4, 4))
t = np.linspace(0, T, 100)
x = r*np.cos(omega*t)
y = r*np.sin(omega*t)
plt.plot(x, y, color='black')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')

for t in np.linspace(0, T, 6):
    x = r*np.cos(omega*t)
    y = r*np.sin(omega*t)
    vx = -r*omega*np.sin(omega*t)
    vy = r*omega*np.cos(omega*t)
    ax = -omega**2*x
    ay = -omega**2*y
    plt.arrow(0, 0, x, y, head_width=0.1, color='black',
              length_includes_head=True)
    plt.arrow(x, y, vx, vy, head_width=0.1, color='blue',
              length_includes_head=True)
    plt.arrow(x, y, ax, ay, head_width=0.1, color='red',
              length_includes_head=True)

plt.grid(True)
```

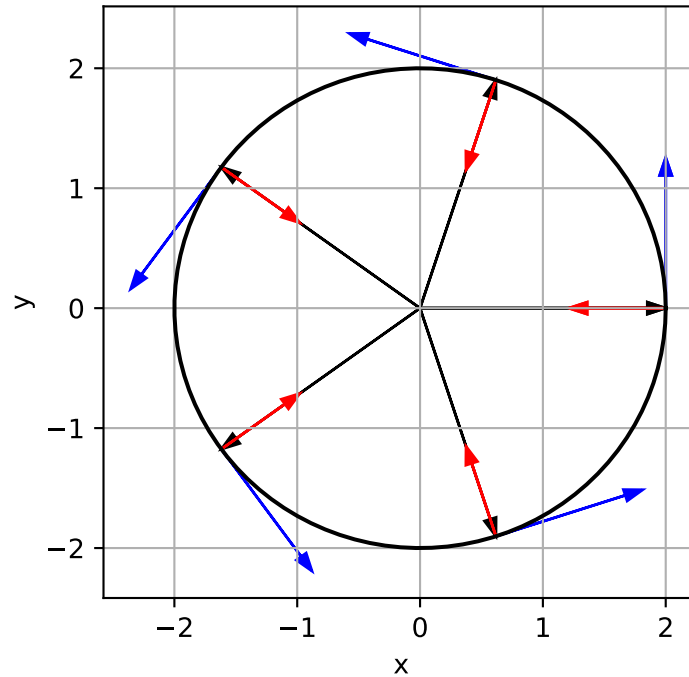



Abbildung 4.9: Kreisbewegung: Ort $s(t)$ in schwarz, die Geschwindigkeit $s'(t)$ in blau und die Beschleunigung $s''(t)$ in rot

4.3 Aufgaben

4.3.1 Ableiten

Berechnen Sie die erste Ableitung von folgenden Funktionen.

1. $f(x) = 4\sqrt[3]{x^5} - 4e^x + \sin(x)$
2. $f(x) = 2x^2 \ln(x)$
3. $f(x) = \frac{10x}{x^2 + 1}$
4. $f(x) = 3e^{-4x}$
5. $f(x) = \sin^2(2x - 4)$
6. $f(t) = \sin(\omega t)$ (erste und zweite Ableitung)

4.3.2 Differenzieren

Berechnen Sie die erste Ableitung von folgenden Funktionen:

1. $y = x^2 e^x$
2. $y = \cos(x) e^{-x}$
3. $y = \ln(\ln(x))$
4. $y = \frac{\sqrt{x} \sin(x)}{\ln(x)}$

5. $y = (4x^3 - x^2 + 1)^5$
6. $y = \sin(x + 2)$
7. $y = e^{x^2 - 2x + 5}$

4.3.3 Differenzieren

1. Berechnen Sie $y''(x)$ von $y(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$.
2. Berechnen Sie $y'(x)$ von $y(x) = 4^{x \sin(x)}$.
3. Berechnen Sie $y'''(x)$ und $y'''(1)$ von $y(x) = x \ln(x)$.

4.3.4 Differenzieren, Tangente

1. Differenzieren Sie die Funktion $f(x) = \cos(2 - x) + 3e^{-x} - \frac{1-x}{x^2}$.
2. Bestimmen Sie die Tangente an die Funktion $y = \ln(x)$ bei $x = 1$, und plotten Sie Funktion und Tangente am Computer.

4.3.5 Differenzieren, Tangente

1. Bestimmen Sie den auf der Funktion $y(t) = 2e^{3t}$ gelegenen Punkt, dessen Tangente mit der positiven t -Achse einen Winkel von 30° einschließt.
2. In welchen Punkten der Funktion $y(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ verlaufen die Tangenten parallel zur Geraden $y = \frac{1}{4}x - 2$?

4.3.6 Tangentengleichung

Gegeben ist die Funktion $y = \sqrt{25 - x^2}$.

1. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an der Stelle $x_0 = 4$.
2. Erstellen Sie am Computer einen Plot des Graphen der Funktion und der Tangente.

4.3.7 Differenzieren, Extrema

1. Differenzieren Sie die Funktion $f(x) = e^{5-x} + 3 \cos^2(x)$.
2. Berechnen Sie alle Extrema (Maxima und Minima) der Funktion $f(x) = -8x^3 + 12x^2 + 18x$.

4.3.8 Kurvendiskussion

Plotten Sie den Graphen der Funktion $y = \frac{x^2 + 1}{x - 3}$ am Computer, und bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge, Nullstellen, Pole, Maxima und Minima.

4.3.9 Umgekehrte Kurvendiskussion

Ein Polynom dritter Ordnung $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ geht durch den Koordinatenursprung und hat im Punkt $P = (1, -2)$ einen Wendepunkt. Die Wendetangente schneidet die x -Achse an der Stelle $x = 2$. Bestimmen Sie a , b , c und d . Überprüfen Sie Ergebnis am Computer.

4.3.10 Extremwerte

Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion $f(x) = (x - 1)e^{-2x}$. Handelt es sich um Maximum, Minimum oder Sattelpunkt? Erstellen Sie einen Plot der Funktion am Computer.

4.3.11 Maximale Bremskraft

Die Bremskraft einer Scheibenbremse ist gegeben durch $K(v) = \frac{a^2 v}{v^2 + b^2}$, wobei $v > 0$ die Geschwindigkeit der Scheibe angibt und $a > 0$ und $b > 0$ Konstanten sind.

1. Skizzieren Sie den Graphen von K ohne eine Wertetabelle zu verwenden. Plotten Sie anschließend den Graphen am Computer.
2. Bei welcher Geschwindigkeit ist die Bremskraft maximal?
3. Berechnen Sie die maximale Bremskraft.

4.3.12 Leistungsaufnahme

Die Leistungsaufnahme eines Verbrauchers vom Widerstand R , der durch eine Zweipolquelle (Innenwiderstand R_i , Quellspannung U_0) gespeist wird, beträgt

$$P(R) = U_0^2 \frac{R}{(R + R_i)^2}.$$

Zeigen Sie, dass der Verbraucherwiderstand R die größtmögliche Leistung aufnimmt, wenn $R = R_i$ gewählt wird (sog. Leistungsanpassung), und bestimmen Sie diese größtmögliche Leistung. Zeigen Sie auch, dass bei $R = R_i$ ein lokales Maximum herrscht.

Quelle: [Pap18] Kapitel IV, Abschnitt 3, Aufgabe 18

4.3.13 Strahlengang

Der Strahlengang eines Laserstrahls geht von der Quelle $Q = (0; 3)$ über den Spiegel $S = (x; 0)$ auf der x -Achse bis zum Empfänger $E = (10; 4,5)$.

1. Bestimmen Sie die x -Koordinate des Punktes S für den kürzesten Weg von Q über S nach E .
2. Überprüfen Sie, dass im Falle des kürzesten Weges das Reflexionsgesetz gilt.

4.3.14 Querschnittsfläche

Aus drei Brettern, die die Breite g und die Länge l haben, wird eine Rinne mit maximalen Querschnittsfläche hergestellt. Siehe Abbildung 4.10. Wie muss der Winkel α dafür gewählt werden? Wie groß ist der maximale Querschnitt?

4.3.15 Extremwertaufgabe

Minimieren Sie die Funktion $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2 - 2y$ unter der Nebenbedingung $3x + 2y = 6$.

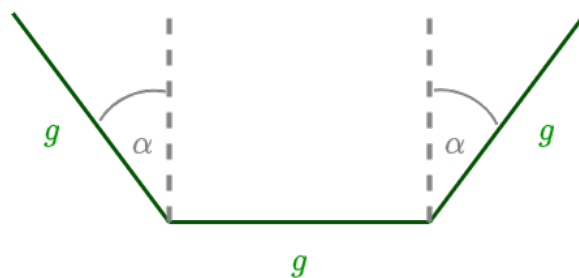


Abbildung 4.10: Rinne

4.3.16 Extremwertaufgabe - Zaun

Herr Huber hat einen großen Garten, der an einen Fluss grenzt. Eines Tages findet er am Dachboden einen 48 Meter langen Zaun, welchen er verwenden will, um seinen Gänsen ein rechteckiges Flächenstück abzugrenzen. Welche Maße muss er für das Flächenstück wählen, damit es an den Fluss grenzt und einen maximalen Flächeninhalt aufweist?

4.3.17 Extremwertaufgabe - Oberfläche

Unter sämtlichen Kreiszyklindern vom Volumen 1000 cm^3 soll derjenige mit der kleinsten Oberfläche gefunden werden. Wie groß sind Radius, Höhe und Oberfläche dieses Zylinders?

4.3.18 Taylor-Reihen

Berechnen Sie die Taylor-Reihen bis zur zweiten Ordnung von

1. $f(x) = \cos(x)$ bei $x_0 = \frac{\pi}{3}$
2. $f(x) = \sqrt{x}$ bei $x_0 = 1$

4.3.19 Taylor-Reihen

1. Berechnen Sie die Taylor-Reihe von $f(x) = \sin(x)$ bei $x_0 = 0$ bis zur dritten Ordnung.
2. Berechnen Sie die Taylor-Reihe von $f(x) = \ln(x)$ bei $x_0 = 1$ bis zur vierten Ordnung.
3. Die Funktion $f(x) = x e^{-x}$ soll in der Umgebung des Nullpunktes durch eine Polynomfunktion dritten Grades angenähert werden.

4.3.20 Taylor-Reihe des Kehrwerts

Berechnen Sie von $f(x) = \frac{1}{x}$ bei $x_0 = 1$ die Taylor-Reihe bis zur zweiten Ordnung, und stellen Sie Ihr Ergebnis am Computer grafisch dar.

4.3.21 Taylor-Reihe einer Wurzelfunktion

Berechnen Sie von $f(x) = \sqrt{1+x}$ bei $x_0 = 3$ die Taylor-Reihe bis zur zweiten Ordnung, und stellen Sie Ihr Ergebnis am Computer grafisch dar.

4.3.22 Limesberechnung

Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^2}$.

Quelle: [Pap18] Kapitel VI, Abschnitt 3, Aufgabe 18f

4.3.23 Limesberechnungen

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x) + e^x + e^{-x} - 4}{x^4}$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln(x)}$

4.3.24 Wurfparabel

Die Wurfparabel eines Steins bei vernachlässigter Luftreibung wird zum Beispiel durch folgende Kurve beschrieben:

$$s(t) = \begin{pmatrix} v_x t \\ v_y t - \frac{g}{2} t^2 \end{pmatrix}$$

mit g der Erdbeschleunigung.

1. Beschreiben Sie die Flugbahn.
2. Berechnen die Geschwindigkeit $s'(t)$ und die Beschleunigung $s''(t)$.
3. Plotten Sie alle drei Kurven für sinnvolle Werte der Parameter v_x und v_y : den Ort $s(t)$, die Geschwindigkeit $s'(t)$ und die Beschleunigung $s''(t)$.

4.3.25 Mehr Aufgaben

- [Pap18]
 - Kapitel IV
 - * Abschnitt 1, Aufgaben 1 - 2
 - * Abschnitt 2, Aufgaben 1 - 9, 13 - 25
 - * Abschnitt 3, Aufgaben 1 - 26 ohne Normalengleichung und Krümmungskreis
 - Kapitel VI
 - * Abschnitt 3: Aufgaben 1 - 21
- [Pap20]
 - Kapitel B Differentialrechnung
 - * Abschnitt 1 Ableitungsregeln: B1 - B32, B37 - B47
 - * Abschnitt 2 Anwendungen der Differentialrechnung: B48 - B66 ohne Normalengleichung, B71 - B95, B100 - B107
 - Kapitel D Taylor- und Fourier-Reihen
 - * 1 Potenzreihenentwicklungen: D6 - D35

- [\[Pap19\]](#)
 - Kapitel III Differentialrechnung, Beispiele 1 - 22
 - Kapitel V Taylor- und Fourier-Reihen: Beispiele 1 - 12

5 Integralrechnung

5.1 Methoden

Motivation

Die Fläche unter dem Funktionsgraphen ist geometrisch anschaulich und wird daher in der Schule zur Erklärung und zum Einüben der Integralrechnung verwendet. In der Technik findet Integralrechnung aber ganz andere und wichtigere Anwendungen:

- Wie erhält man die in einem bestimmten Zeitraum bezogene Energie (kWh) aus der Lastkurve (kW)?
- Wie kann man die in einem bestimmten Zeitraum gefahrene Strecke aus dem Geschwindigkeitsverlauf bestimmen?
- Wie berechnet sich das Trägheitsmoment eines Körpers?
- Wie berechnet man die Arbeit einer Kraft über einen bestimmten Weg?
- Wie bestimmt man die Wahrscheinlichkeit, dass eine normalverteilte Größe ihren Wert in einem bestimmten Bereich annimmt?
- Wie berechnet man den Wärmetransfer in einem thermodynamischen Prozess?

All diese Problemstellungen werden mit Hilfe der Integralrechnung gelöst. Sie haben die Gemeinsamkeit, dass man die Summe von Teilen über einen bestimmten Bereich bildet. Integrieren ist also das Aggregieren (Aufsummieren, Addieren) von Teilen (Energieteile, Streckenteile, Trägheitsmomententeile, Flächenteile, Volumenteile, Massenteile, Kostenteile, Wärmeteile etc.) zu einer Gesamtheit (Energie, Strecke, Trägheitsmoment, Fläche, Volumen, Masse, Kosten, Wärme etc.).

Während sich die Differentialrechnung mit der lokalen Änderung (Differenz) einer Funktion beschäftigt, behandelt die Integralrechnung das Zusammenfassen (Summieren) von Teilen. Da man diese Teile als Differenzen darstellen kann, sind Differential- und Integralrechnung eng miteinander verbunden.

5.1.1 (Un-)bestimmtes Integral

Wir beginnen mit den folgenden, typisch mathematischen Fragestellungen, die auf den ersten Blick nichts mit den gerade beschriebenen Problemstellungen zu tun haben: “Was ist die Umkehrung der Differentiation (des Ableitens)? Ist die Umkehrung immer möglich? Ist sie eindeutig oder mehrdeutig? Wie kann man sie berechnen?” Hier ein paar Antworten: Durch das Ableiten erhält man zu einer Funktion f die Ableitungsfunktion f' . Diese Operation ist eindeutig und (vergleichsweise) einfach zu berechnen. Bei der Umkehrung ist eine Funktion f gegeben, und man fragt sich, welche Funktion(en) durch Ableiten f ergeben? Vergleiche Quadrieren und Wurzelziehen. Wenn es eine solche Funktion, nennen wir sie F , gibt, dann erfüllt sie $F' = f$. Die Umkehrung nennt man **(unbestimmte) Integration**, und ein solches F heißt **Stammfunktion** oder **unbestimmtes Integral** von f .

Beispiel: Sei f die Funktion $f(x) = 2$. Eine Stammfunktion ist $F(x) = 2x$. Aber auch $G(x) = 2x + 7$ ist eine Stammfunktion und $H(x) = 2x - 2,96$ und so weiter.

Es gilt allgemein: Jede Funktion f hat eine ganze Schar von Stammfunktionen, die sich aber nur durch eine additive Konstante (=Integrationskonstante) unterscheiden. Die Graphen dieser Stammfunktionen sind also entlang der y -Achse verschobene Kopien einer beliebigen Stammfunktion.

Schreibweise: Das unbestimmte Integral einer Funktion f schreibt man als $\int f(x) dx = F(x) + C$ mit $C \in \mathbb{R}$ der Integrationskonstante.

Stammfunktionen elementarer Funktionen: Dazu müssen wir Ableitungstabellen nur rückwärts lesen und erhalten daraus z. B. Tabelle 5.1:

Tabelle 5.1: Stammfunktionen elementarer Funktionen

$f(x)$	$F(x) + C$
0	C
1	$x + C$
Konstante k	$kx + C$
Potenzfunktion x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ für $n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
e^x	$e^x + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$

Mehr sogenannte Integraltabellen finden Sie in der Literatur und im Internet, z. B. in [Wikipedia](#) und in Kapitel V, Abschnitt 5, Tabelle 2 in [\[Pap18\]](#) auf Seite 445.

Nun kommen wir zum Zusammenhang des unbestimmtes Integrals zu den anfangs angeführten Problemstellungen, bei denen über einen bestimmten Bereich integriert wird. Daher die Bezeichnung **bestimmtes Integral** für solche Problemstellungen.

Beispiel: Sie wollen den Energieverbrauch (kWh) eines elektrischen Geräts zwischen dem Zeitpunkt $x = a = 8$ Uhr gestern und $x = b = 17$ Uhr gestern aus dem aufgezeichneten Lastgang (kW) $f(x)$ bestimmen. Wäre der Energieverbrauch seit der ersten Inbetriebnahme als $F(x)$ aufgezeichnet worden, könnten Sie den gesuchten gestrigen leicht über $F(b) - F(a)$ bestimmen. Wir zerlegen den Gesamtbetrag in eine Summe von (kleinen) Differenzen, um den Zusammenhang zum Lastgang $f(x)$ zu klären:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(17) - F(8) = \\ &= [F(17) - F(16,5)] + [F(16,5) - F(16)] + \dots + [F(8,5) - F(8)] = \\ &= \sum \Delta F, \end{aligned}$$

wobei wir auf eine Indexierung der einzelnen Differenzen der Einfachheit halber verzichten. Jede Differenz ΔF lässt sich mit der Differentialrechnung approximieren: $\Delta F \simeq dF = F'(x) dx$. Der Energieverbrauch F ist eine Stammfunktion des Lastgangs f , d. h. $\int f(x) dx = F(x)$. In anderen Worten: Die Ableitung (der Energieverbrauch pro Zeit) F' ist gleich dem Lastgang f . Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum \Delta F = \\ &\simeq \sum dF = \\ &= \sum F'(x) dx = \\ &= \sum f(x) dx. \end{aligned}$$

Je kleiner die Schrittweite dx , umso besser ist die Approximation. Man kann zeigen, dass die Approximation im Grenzwert $dx \rightarrow 0$ exakt ist und schreibt dann:

$$F(b) - F(a) = \lim_{dx \rightarrow 0} \sum f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Wir fassen zusammen:

$$\int f(x) dx = F(x)$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Die Funktion $f(x)$ ist dabei der Integrand, x ist die Integrationsvariable, und die Werte a und b heißen obere bzw. untere (Integrations-)Grenzen.

Der Zusammenhang zwischen Stammfunktion F und Flächen unter den Graphen von f ist in Abbildung 5.1 dargestellt.

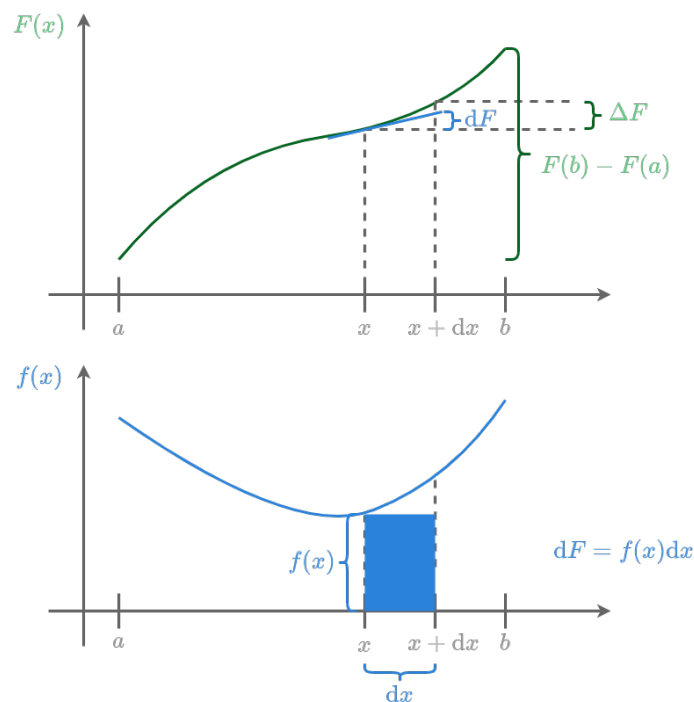


Abbildung 5.1: Zusammenhang zwischen Stammfunktion und Flächenberechnung

Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung:

- Das bestimmte Integral von $f(x)$ zwischen den Integrationsgrenzen a und b , d. h. die Fläche unter dem Graphen von $f(x)$ zwischen a und b , lässt sich mittels einer Stammfunktion $F(x)$ berechnen als:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) =: F(x) \Big|_a^b$$

- Die Ableitung eines bestimmten Integrals nach der oberen Grenze ergibt den Integranden an der oberen Grenze:

$$\left[\int_a^x f(t) dt \right]' = [F(x) - F(a)]' = F'(x) = f(x)$$

Da die Integralrechnung die Umkehrung der Differentialrechnung ist, gelten für sie auch analoge **Rechenregeln**:

$$\begin{aligned} \int k \cdot f(x) dx &= k \cdot \int f(x) dx \text{ für } k \in \mathbb{R} \\ \int f(x) + g(x) dx &= \int f(x) dx + \int g(x) dx \\ \int_a^b f(x) dx &= - \int_b^a f(x) dx \\ \int_a^a f(x) dx &= 0 \\ \int_a^c f(x) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx \end{aligned}$$

Die ersten beiden Regeln gelten auch für bestimmte Integrale, also mit Grenzen.

5.1.2 Integrationsmethoden

5.1.2.1 Partielle Integration

Wir formen die Produktregel der Differentialrechnung zunächst etwas um:

$$\begin{aligned} [f(x) \cdot g(x)]' &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\ f'(x) \cdot g(x) &= [f(x) \cdot g(x)]' - f(x) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

Die unbestimmte Integration der letzten Gleichung liefert die Formel der partiellen Integration:

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx.$$

Beispiel: Für das Integral $\int x \cdot e^x dx$ setzen wir $f'(x) = e^x$ und $g(x) = x$, weil das Integral von e^x wieder e^x ist, aber x durch Ableiten zu 1 wird, sodass das resultierende Integral einfach zu berechnen ist:

$$\begin{aligned} \int x \cdot e^x dx &= x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx = \\ &= x \cdot e^x - e^x + C = \\ &= e^x(x - 1) + C \end{aligned}$$

5.1.2.2 Substitution

Die Substitution entspricht in der Differentialrechnung der Kettenregel. Sie kann auf zwei Arten durchgeführt werden:

- Ersetzen (=Substituieren) eines Terms des Integranden durch eine neue Integrationsvariable.

- Ersetzen der Integrationsvariablen durch einen Term, der eine neue Integrationsvariable enthält.

Nach der Substitution des Integranden und des Differentials der Integrationsvariablen erhält man ein Integral in der neue Integrationsvariablen. Dessen Lösung (Stammfunktion) wird anschließend wieder auf die alte Integrationsvariable rücksubstituiert. Bei bestimmten Integralen kann man dann die ursprünglichen Grenzen einsetzen. Alternativ können die Grenzen mitsubstituiert und vor der Rücksubstitution in die Lösung eingesetzt werden.

Beispiel: Zur Berechnung des bestimmten Integrals $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cdot \cos(x^2) dx$ führen wir die Substitution $u(x) := x^2$ durch. Das Differential ergibt sich zu $du = 2x dx$.

1. Wir berechnen zuerst das unbestimmte Integral $\int x \cdot \cos(x^2) dx$: Durch Umformen erhalten wir $dx = \frac{1}{2x} du$. Einsetzen in das ursprüngliche Integral, Lösen des neuen Integrals und anschließende Rücksubstitution liefern:

$$\begin{aligned} \int x \cdot \cos(x^2) dx &= \int x \cdot \cos(u) \frac{1}{2x} du = \\ &= \frac{1}{2} \int \cos(u) du = \\ &= \frac{1}{2} \sin(u) + C = \\ &= \frac{1}{2} \sin(x^2) + C \end{aligned}$$

2. Nun können wir das bestimmte Integral lösen:

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{\pi}} x \cdot \cos(x^2) dx &= \frac{1}{2} \sin(x^2) \Big|_0^{\sqrt{\pi}} = \\ &= \frac{1}{2} \sin(\pi) - \frac{1}{2} \sin(0) = 0. \end{aligned}$$

3. Alternativ hätten wir die substituierten Grenzen in $\frac{1}{2} \sin(u)$ einsetzen können: $u(0) = 0$, $u(\sqrt{\pi}) = \pi$ und $\frac{1}{2} \sin(u) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2} \sin(\pi) - \frac{1}{2} \sin(0) = 0$.

i Achtung!

Nicht jede partielle Integration und nicht jede Substitution führt zu einem einfacheren Integral!

Oft will man ein Integral von der Form $\int f(ax + b) dx$ mit Konstanten a und b lösen, von dem man die Stammfunktion von $f(x)$ als $\int f(x) dx = F(x)$ kennt. Die Substitution $u(x) = ax + b$ liefert dann immer

$$\int f(ax + b) dx = F(ax + b) \frac{1}{a}.$$

Diese Formel ist schneller als die ausführliche Substitution.

Beispiel: $\int e^{-3x} dx = e^{-3x} \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3} e^{-3x}$

5.1.2.3 Partialbruchzerlegung

Diese Methode lässt sich auf Integrale anwenden, deren Integranden **echt gebrochen rationale Funktionen** sind. Dabei wird ein Bruch in eine Summe von kleineren Brüchen zerlegt, die einfach zu integrieren sind.

Beispiel: Quelle: [Pap18] Seite 472ff. Der Integrand des Integrals

$$\int \frac{2x^3 - 14x^2 + 14x + 30}{x^2 - 4} dx$$

ist nicht echt gebrochen rational, da der Grad des Zählerpolynoms nicht kleiner als der Grad des Nennerpolynoms ist. **Polynomdivision** liefert

$$\frac{2x^3 - 14x^2 + 14x + 30}{x^2 - 4} = 2x - 14 + \frac{22x - 26}{x^2 - 4}$$

Das Integral ist somit gleich der Summe

$$\int 2x - 14 dx + \int \frac{22x - 26}{x^2 - 4} dx.$$

Das erste Integral ergibt $x^2 - 14x$. Das zweite zerlegen wir in seine Partialbrüche. Dazu bestimmt man zuerst die Nullstellen des Nenners $x^2 - 4$: $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$ sind jeweils einfache Nullstellen. Als solche liefern sie folgende Partialbrüche:

$$\begin{aligned} \frac{22x - 26}{x^2 - 4} &= \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} = \\ &= \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2} \end{aligned}$$

Dabei sind A und B noch unbekannte Konstanten. Multiplikation mit dem Hauptnenner $(x - 2)(x + 2) = x^2 - 4$ ergibt die Gleichung

$$22x - 26 = A(x + 2) + B(x - 2),$$

die für alle x gilt, insbesondere für die Nullstellen. Setzt man x_1 in die Gleichung ein, erhält man $A = 4,5$. Einsetzen von x_2 gibt uns $B = 17,5$. Damit können wir das zweite Integral lösen:

$$\begin{aligned} \int \frac{22x - 26}{x^2 - 4} dx &= \int \frac{4,5}{x - 2} dx + \int \frac{17,5}{x + 2} dx \\ &= 4,5 \ln |x - 2| + 17,5 \ln |x + 2| \end{aligned}$$

Allgemeine Vorgehensweise bei rein reellen Nullstellen:

- Eine einfache Nullstelle x_1 führt zum Partialbruch $\frac{A}{x - x_1}$
- Eine zweifache Nullstelle x_1 führt zu den Partialbrüchen $\frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2}$
- Eine n -fache Nullstelle x_1 führt zu den Partialbrüchen $\frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x - x_1)^n}$

zur Bestimmung der Konstanten A_k können nach der Multiplikation mit dem Hauptnenner beliebige x -Werte eingesetzt werden, z. B. die Nullstellen. Man erhält ein lineares Gleichungssystem für die Konstanten. Alternative Methoden zur Bestimmung der Konstanten und den Fall von komplexen Nullstellen findet man z. B. in [Wikipedia](#).

5.1.3 Anwendungen

5.1.3.1 Fläche

Das bestimmte Integral

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

ergibt die Fläche unter dem Graphen der Funktion $f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$. Das sogenannte Flächenelement $dA := f(x) dx$ bezeichnet die aufsummierten Flächenteile.

Achtung

- Man schreibt oft sehr kurz $A = \int dA$ und verzichtet dabei auf die Angabe der Grenzen.
- Das Symbol A wird hier leider doppelt verwendet: Einerseits bezeichnet es die Zahl A , die den Flächeninhalt angibt. Andererseits muss A in $dA = f(x) dx$ eine nicht konstante Funktion sein, nämlich eine Stammfunktion von f . Dieses Problem tritt auch bei den folgenden “Elementen” (Volumenelement, Massenelement, Bogenlängenelement etc.) auf, ist aber Standardnotation in der Literatur.
- Die Fläche unter dem Graphen wird in Bereichen, wo die Funktion negative Funktionswerte hat, negativ gezählt. Nimmt die Funktion zwischen den Grenzen sowohl positive als auch negative Werte an, so werden entsprechend positive und negative Flächenteile durch das Integral aufsummiert. Beispiel: $\int_0^{2\pi} \sin(x) dx = 0$.

5.1.3.2 Rotationsvolumen

Lässt man zwischen $x = a$ und $x = b$ die Funktion $f(x) \geq 0$ um die x -Achse rotieren, generiert man ein Rotationsvolumen der Größe

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Das Integral aggregiert scheibenförmige Volumenelemente $dV := \pi[f(x)]^2 dx$ mit Radius $f(x)$, Boden/Deckfläche $\pi[f(x)]^2$ und Dicke dx , d. h. $V = \int dV$.

5.1.3.3 Bogenlänge

Die Bogenlänge ist die Länge des Graphs einer Funktion $f(x)$ zwischen zwei Grenzen $x = a$ und $x = b$. Sie kann durch Aufsummieren der Bogenlängenelementen $ds := \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(dx)^2 + (f'(x)dx)^2} = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ berechnet werden. Die gesamte Bogenlänge zwischen $x = a$ und $x = b$ ist daher

$$s = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

5.1.3.4 Mantelfläche

Die Mantelfläche einer zwischen $x = a$ und $x = b$ um die x -Achse rotierenden Funktion $f(x) \geq 0$ kann mit dem Integral

$$M = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

berechnet werden. Die Argumentation ist ähnlich aber etwas komplizierter, siehe z. B. [Pap18] Kapitel V, Abschnitt 10.5. Das Mantelflächelement ist daher $dM := 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} dx$.

5.1.3.5 Schwerpunkt eines Rotationskörpers

Der Schwerpunkt des Rotationskörpers einer zwischen $x = a$ und $x = b$ um die x -Achse rotierenden Funktion $f(x) \geq 0$ liegt auf der x -Achse und hat die x -Koordinate

$$x_S = \frac{\pi}{V} \int_a^b x \cdot [f(x)]^2 dx.$$

5.1.3.6 Masse

Massenberechnungen können durchgeführt werden, indem Massenelemente $dm := \rho(x) dV$ zu einer Gesamtmasse

$$m = \int dm = \int \rho(x) dV$$

aufsummiert werden.

5.1.3.7 Massenträgheitsmoment

Das Massenträgheitsmoment J eines Körpers bzgl. einer gegebenen Drehachse ist definiert als das Integral der Massenträgheitsmomentelemente $dJ := r^2 dm$:

$$J = \int dJ = \int r^2 dm.$$

Dabei bezeichnet r den (kürzesten) Abstand des Massenelements dm zur Drehachse. Der [Satz von Steiner](#) besagt, wie sich das Massenträgheitsmoment J_S bzgl. einer Drehachse durch den Schwerpunkt zum Massenträgheitsmoment J_P bzgl. einer dazu parallelen Drehachse verhält: $J_P = J_S + md^2$. Dabei bezeichnet m die Masse des Körpers und d den Abstand der parallelen Drehachsen.

5.1.3.8 Arbeit

Wir betrachten eine 1-dimensionale Bewegung (Zug auf Schienen, vertikale Steig-Fall-Bewegung) mit Ortskoordinate x . Die von einer im Allgemeinen ortsabhängigen Kraft $F(x)$ verrichtete Arbeit W entlang des Weges von $x = a$ nach $x = b$ ist definiert als das Integral

$$W = \int_a^b F(x) dx.$$

5.1.3.9 Linearer und Quadratischer Mittelwert

Der (lineare) Mittelwert \bar{y}_{linear} einer Funktion $y(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ mit $b > a$ ist definiert als

$$\bar{y}_{\text{linear}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b y(x) dx,$$

und ihr quadratischer Mittelwert $\bar{y}_{\text{quad.}}$ ist definiert als

$$\bar{y}_{\text{quad.}} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b y(x)^2 dx}.$$

Für Anwendungen dieser Mittelwerte in Mechanik und Elektrotechnik siehe [Pap18] Kapitel V, Abschnitt 10.7.

5.1.3.10 Uneigentliche Integrale

Als uneigentliche Integrale bezeichnet man Integrale, deren Integrationsintervall unendlich ist oder eine Polstelle berührt.

Beispiel: Wie viel Energie benötigt es, um einen kleinen Körper (z. B. Sie) der Masse m gegen die Gravitationskraft eines sehr großen Körpers (z. B. Erde) der Masse M unendlich weit weg zu bringen? Die Gravitationskraft G zwischen den Körpern hängt von ihrem Abstand r ab und hat den Absolutbetrag $G(r) = \gamma \frac{mM}{r^2}$, siehe [Wikipedia](#). Anfangs befinden sich die Körper im Abstand r_0 . Wir können die benötigte Energie als Arbeit entlang des unendlich langen Weges von $r = r_0$ bis $r = \infty$ berechnen. Allerdings ist ∞ keine reelle Zahl! Daher betrachten wir zuerst das Integral von $r = r_0$ bis $r = r_1 \in \mathbb{R}$ und betrachten anschließend vom Ergebnis den Grenzwert $r_1 \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^{r_1} G(r) dr &= \gamma m M \int_{r_0}^{r_1} \frac{1}{r^2} dr = \\ &= \gamma m M \int_{r_0}^{r_1} r^{-2} dr = \\ &= \gamma m M \left. \frac{r^{-1}}{-1} \right|_{r_0}^{r_1} = \\ &= \gamma m M \left[-\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_0} \right] \\ \lim_{r_1 \rightarrow \infty} \gamma m M \left[\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right] &= \frac{\gamma m M}{r_0} \end{aligned}$$

Allgemeine Vorgehensweise:

- Unendliches Integrationsintervall, z. B.:

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

- Integrationsintervall berührt eine Polstelle (Unendlichkeitsstelle) des Integranden, z. B. bei $x = b$:

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\lambda \rightarrow 0, \lambda > 0} \int_a^{b-\lambda} f(x) dx$$

5.2 Beispiele

5.2.1 Unbestimmtes Integral

Wir betrachten ein Objekt (z.B. ein Fahrzeug oder ein fallender Stein), das sich nur in eine Richtung bewegt und eine konstante Beschleunigung a hat. Wir suchen die allgemeine Lösung für sein Weg-Zeit-Gesetz $s(t)$, d. h. alle erlaubten Funktionen des Ortes s in Abhängigkeit der Zeit t . Dieses Problem wird durch zweifaches unbestimmtes Integrieren gelöst:

$$\ddot{s}(t) = a$$

Unbestimmtes Integrieren liefert das allgemeine Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz:

$$\dot{s}(t) = at + C$$

mit $C = \dot{s}(0) = v_0$ der Anfangsgeschwindigkeit. Nochmaliges unbestimmtes Integrieren liefert das allgemeine Weg-Zeit-Gesetz:

$$s(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0t + D$$

mit $D = s(0) = s_0$ dem Anfangsort. Insgesamt erhalten wir das allgemeine Weg-Zeit-Gesetz einer ein-dimensionalen Bewegung mit konstanter Beschleunigung, d. h. unter konstanter Krafteinwirkung:

$$s(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0t + s_0.$$

5.2.2 Bestimmtes Integral

Wir berechnen das bestimmte Integral $\int_0^{\pi/2} \sin(3t - \pi/4) dt$ mit Hilfe der einfachen Substitutionsformel $\int f(ax + b) dx = F(ax + b) \frac{1}{a}$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin(3t - \pi/4) dt &= -\cos(3t - \pi/4) \frac{1}{3} \Big|_0^{\pi/2} = \\ &= -\frac{1}{3} \left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] = \\ &= -\frac{1}{3} \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

5.2.3 Integrationsmethoden

Wir lösen Sie die folgenden Integrale.

1. $\int x \sin(x^2) dx$
2. $\int x \ln(x) dx$

Quellen: [Pap18] Kapitel V, Abschnitt 8, Aufgaben 1h und 5a

1. Einsetzen der Substitution $u = x^2$ mit $du = 2x dx$ ergibt

$$\begin{aligned}\int x \sin(x^2) dx &= \int \frac{1}{2} \sin(u) du = \\ &= -\frac{1}{2} \cos(u) + C = \\ &= -\frac{1}{2} \cos(x^2) + C\end{aligned}$$

Probe durch Ableiten: $(-\frac{1}{2} \cos(x^2) + C)' = -\frac{1}{2}(-\sin(x^2))2x + 0 = x \sin(x^2)$.

2. Partielle Integration mit $f'(x) = x$ und $g(x) = \ln(x)$:

$$\begin{aligned}\int x \ln(x) dx &= \frac{x^2}{2} \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \\ &= x^2 \ln(x) - \int \frac{x}{2} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4} + C = \\ &= \frac{x^2}{4} (2 \ln(x) - 1) + C.\end{aligned}$$

Probe durch Ableiten mit Produktregel: $(\frac{x^2}{4}(2 \ln(x) - 1) + C)' = \frac{x}{2}(2 \ln(x) - 1) + \frac{x^2}{4} \frac{2}{x} = x \ln(x) - \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x \ln(x)$.

5.2.4 Kreisfläche

Zur Bestimmung des Flächeninhalts eines Kreises mit Radius r verwenden wir die Kreisgleichung $x^2 + y^2 = r^2$ für einen Kreis mit dem Ursprung als Mittelpunkt. Im ersten Quadranten erhalten wir daraus die Funktionsgleichung $y(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Die Kreisfläche A kann somit durch folgendes bestimmtes Integral berechnet werden:

$$A = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

Dieses Integral kann z. B. mit der Substitution $x = r \cos(u)$ berechnet werden, wobei wir kurz u für $u(x)$ schreiben. Es folgt $dx = -r \sin(u) du$. Die neue Variable u entspricht dem Winkel eines Punktes auf dem Kreis im ersten Quadranten mit Koordinaten (x, y) . Damit lauten die substituierten Grenzen:

$$\begin{aligned}x = 0 &\iff u = \frac{\pi}{2} \\ x = r &\iff u = 0\end{aligned}$$

Das transformierte Integral ist

$$\begin{aligned}
 A &= 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{r^2 - (r \cos(u))^2} \cdot (-r) \sin(u) \, du = \\
 &= -4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{r^2 \sin^2(u)} \cdot r \sin(u) \, du = \\
 &= -4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 r^2 \sin^2(u) \, du = \\
 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin^2(u) \, du = \\
 &= 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(u) \, du =
 \end{aligned}$$

In den Additionstheoremen, siehe z. B. [Wikipedia](#) und [Pap09], findet man die hilfreiche Formel $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$. Damit können wir weiterrechnen:

$$\begin{aligned}
 A &= 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \, du - 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos(2u) \, du = \\
 &= 2r^2 u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2r^2 \sin(2u) \frac{1}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
 &= 2r^2 \frac{\pi}{2} - r^2 (\sin(\pi) - \sin(0)) = \\
 &= \pi r^2.
 \end{aligned}$$

5.2.5 Uneigentliches Integral

Der Integrand des Integrals $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} \, dx$ hat bei der oberen Grenze eine Polstelle. Es handelt sich daher um eine uneigentliches Integral, das wir mittels Grenzwertbildung berechnen:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} \, dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0, \lambda > 0} \int_0^{1-\lambda} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \, dx = \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow 0, \lambda > 0} \int_0^{1-\lambda} (1-x)^{-\frac{1}{2}} \, dx = \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow 0, \lambda > 0} (1-x)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{-\frac{1}{2}} \Big|_0^{1-\lambda} = \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow 0, \lambda > 0} -2\sqrt{1-x} \Big|_0^{1-\lambda} = \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow 0, \lambda > 0} -2\sqrt{\lambda} + 2\sqrt{1} = \\
 &= 2.
 \end{aligned}$$

5.2.6 Numerisches Integrieren

Nicht alle Integrale können analytisch mit einer Formel für eine Stammfunktion gelöst werden. Zum Beispiel lässt sich das unbestimmte Integral der Normalverteilung nicht mit elementaren Funktionen darstellen. In solchen Fällen verwendet man bereits vorhandene, numerisch berechnete Tabellenwerte oder führt die numerische Integration selber durch.

Um die Genauigkeit einer numerischen Integration bewerten zu können, integrieren wir im folgenden Beispiel eine Funktion $f(x)$, die sich auch analytisch (d. h. exakt mit einer Formel) integrieren lässt.

Beispiel: Das Integral von $f(x) = \sin(x)$ zwischen 0 und π hat die analytische Lösung

$$I_{\text{exakt}} = \int_0^{\pi} \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^{\pi} = 1 + 1 = 2.$$

Für eine approximative numerische Lösung berechnen wir eine [Riemann-Summe](#) mit Schrittweite h und Stützstellen $x_0 = 0, x_1 = h, x_2 = 2h, \dots, x_n = \pi$, um die Fläche unter dem Graphen durch Rechtecke der Breite h und Höhe $f(x_i)$ anzunähern:

$$I_{\text{approx}} = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot h$$

Die Riemann-Summe ist in [Abbildung 5.2](#) dargestellt.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

n = 50
h = np.pi/n
x = np.linspace(0, np.pi - h, num=n)
I_approx = np.sum(np.sin(x)*h)
print(f"Riemann-Summe = {I_approx:.5f}")

plt.figure(figsize=(5, 3))
x_plot = np.linspace(0, np.pi, n)
plt.step(x_plot, np.sin(x_plot), 'r', where='post')
plt.plot(x_plot, np.sin(x_plot), '-k')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.grid(True)
```

Riemann-Summe = 1.99934

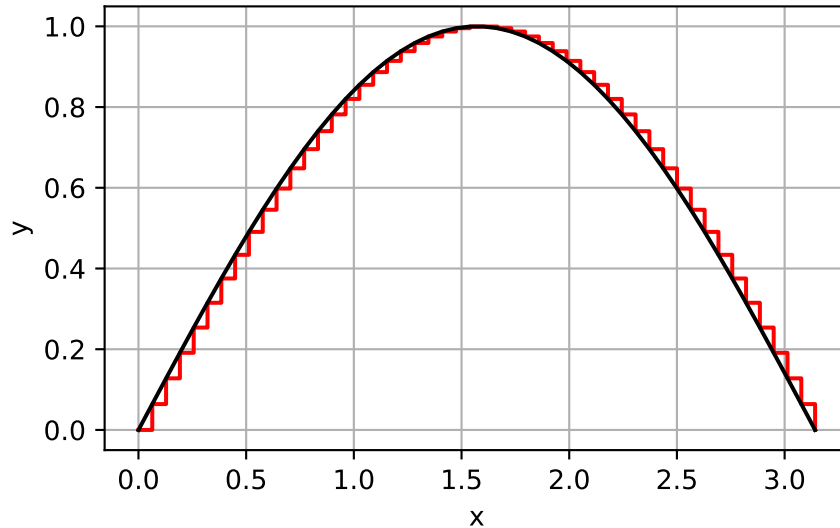


Abbildung 5.2: Riemann-Summe und exaktes Integral

5.3 Aufgaben

5.3.1 Stammfunktionen

Bestimmen Sie die Stammfunktionen der folgenden Funktionen.

1. $f(x) = 4x^5 - 6x^3 + 8x^2 - 3x + 5$
2. $f(t) = 2e^t - \frac{5}{t} + 1$
3. $f(x) = \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\cos^2(x)}$
4. $f(x) = \frac{1-2x^2-4x^3}{2x} + 3$

5.3.2 Unbestimmte Integrale

Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

1. $\int \frac{\tan(x)}{\sin(2x)} dx$
2. $\int \sqrt{x}\sqrt{x} dx$
3. $\int \frac{10}{\cosh^2(x)} - 3a^x - b \sin(x) dx$
4. $\int \frac{\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt{x^4}} dx$

5.3.3 Biegegleichung

Die Biegegleichung eines Balkens der Länge l , der in den beiden Endpunkten $x = 0$ und $x = l$ unterstützt wird, lautet bei gleichmäßiger Streckenlast F

$$y''(x) = -\frac{F}{2EI}(lx - x^2)$$

mit $0 \leq x \leq l$ und den Parametern E (Elastizitätsmodul) und I (Flächenmoment). Bestimmen Sie durch Integration die Biegelinie $y(x)$ für die Randwerte $y(0) = 0$ und $y'(l/2) = 0$. Erstellen Sie am Computer einen Plot der Biegelinie.

Quelle: [Pap18] Kapitel V, Abschnitt 10, Aufgabe 3

5.3.4 Integrationskonstante

Wie lautet die Funktionsgleichung der durch den Punkt $P = (0|2)$ verlaufenden Funktion $y(x)$ mit der Ableitung $y'(x) = \sin(x) + 3e^x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{1+x^2}$?

5.3.5 Substitution

Lösen Sie die folgenden Integrale durch Substitution, und machen Sie die Probe.

1. $\int \sin(3x) dx$
2. $\int \sin(x) e^{\cos(x)} dx$
3. $\int \frac{3x}{1+x^2} dx$

5.3.6 Integrationsmethoden

1. Berechnen Sie $\int_0^\pi \cos^3(x) \cdot \sin(x) dx$.
2. Berechnen Sie $\int x \cdot \cos(x) dx$.
3. Berechnen Sie $\int \ln(x) dx$.

Quelle: [Pap18] Kapitel V, Abschnitt 8, Aufgaben 1e und 5b

5.3.7 Schwierige Integrale

Berechnen Sie die folgenden schwierigen Integrale, und machen Sie die Probe.

1. $\int \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx$
2. $\int \sin^3(x) dx$
3. $\int e^{\sqrt{x}} dx$
4. $\int \frac{1}{\cos^4(x)} dx$

5.3.8 Partialbruchzerlegung

Lösen Sie das folgende Integral durch Partialbruchzerlegung des Integranden:

$$\int \frac{4x - 2}{x^2 - 2x - 63} dx$$

Quelle: [Pap18] Kapitel V, Abschnitt 8, Aufgabe 7d

5.3.9 Partialbruchzerlegung

Berechnen Sie

$$\int \frac{2x + 1}{x^3 - 6x^2 + 9x} dx.$$

Quelle: [Pap18] Kapitel V, Abschnitt 8, Aufgabe 7e

5.3.10 Polynomdivision und Partialbruchzerlegung

Lösen Sie $\int_0^2 \frac{x-4}{x+1} dx$.

Quelle: [Pap18] Kapitel V, Abschnitt 8, Aufgabe 10f

5.3.11 Polynomdivision und Partialbruchzerlegung

Lösen Sie $\int \frac{x^3}{(x^2-1)(x+1)} dx$.

Quelle: [Pap18] Kapitel V, Abschnitt 8, Aufgabe 10e

5.3.12 Schwerpunkt

Durch Rotation der Kurve $y = \sqrt{\cos(x)}$, $0 \leq x \leq \pi/2$ um die x -Achse entsteht ein Drehkörper. Wo befindet sich der Schwerpunkt des Körpers?

Quelle: [Pap18] Kapitel V, Abschnitt 10, Aufgabe 32

5.3.13 Bogenlänge

Wie lang ist der Bogen des Funktionsgraphen von $y = x^{3/2}$ über dem Intervall $1 \leq x \leq 7,45$?

Quelle: [Pap18] Kapitel V, Abschnitt 10, Aufgabe 16

5.3.14 Rotationsvolumen

Berechnen Sie das Volumen eines Rotationsellipsoids mit der Hauptachse a und der Nebenachse b .

5.3.15 Mantelfläche

Berechnen Sie die Mantelfläche eines Kreiskegels mit Radius R und Höhe H .

5.3.16 Rotationsvolumen und Mantelfläche

Die Funktion $f(x) = \sin(x)$ rotiert um die x -Achse zwischen $x = 0$ und $x = \pi$. Berechnen Sie das Rotationsvolumen und die Mantelfläche (= in diesem Fall gleich der Oberfläche) des Rotationskörpers.

Hinweis: Verwenden Sie, dass $\sqrt{a^2 + x^2}$ die Stammfunktion $\frac{a^2}{2} \operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2}$ hat, und benutzen Sie zur Berechnung des arsinh die Formel $\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

5.3.17 Uneigentliches Integral

Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ divergiert, also unendlich viel Fläche unter dem Graphen zwischen 0 und 1 ist.

5.3.18 Integrationskonstante

Zeigen Sie, dass sich zwei Stammfunktionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$ einer Funktion $f(x)$ nur durch eine Integrationskonstante unterscheiden können.

5.3.19 Einfache Substitutionsformel

Beweisen Sie $\int f(ax + b) dx = F(ax + b) \frac{1}{a}$

1. durch Substitution und
2. durch Differentiation.

5.3.20 Mehr Aufgaben

- [\[Pap18\]](#) Kapitel V
 - Abschnitte 1 - 7, Aufgaben 1 - 4, 6 - 10
 - Abschnitt 8, Aufgaben 1 - 12
 - Abschnitt 9, Aufgaben 1 - 4
 - Abschnitt 10, Aufgaben 1 - 37
- [\[Pap20\]](#) Kapitel C Integralrechnung, C1 - C29, C33 - C68
- [\[Pap19\]](#) Kapitel IV Integralrechnung: Beispiele 1 - 23

6 Differentialgleichungen

6.1 Methoden

Motivation

In der Technik werden Differentialgleichungen (DGL) typischerweise verwendet, um die Dynamik eines Systems zu beschreiben. Die Lösungsmenge der DGL umfasst dann genau die möglichen zeitlichen Entwicklungen des Systems. Kennt man den Zustand des Systems zu einem Zeitpunkt und seine DGL, dann kann man alle seine zukünftigen und vergangenen Zustände berechnen. Diese sehr effiziente und erfolgreiche Vorgehensweise ist in der Physik und somit in der Technik allgegenwärtig, z. B.:

- Die klassische Mechanik fundiert auf der Newtonschen Bewegungsgleichung, ein System von gewöhnlichen DGL 2. Ordnung.
- Die Elektrotechnik beruht auf den **Maxwell-Gleichungen**, ein System von linearen **partiellen DGL** 1. Ordnung.
- In der Quantenmechanik wird die Dynamik eines isolierten Systems durch die Schrödingergleichung, eine lineare partielle DGL. 1. Ordnung, bestimmt.
- Die Navier-Stokes-Gleichungen, ein System von nichtlinearen partiellen DGL 2. Ordnung, sind zentral für die Strömungslehre.
- Die Wärmeleitungsgleichung ist eine linear partielle DGL 2. Ordnung.

6.1.1 Grundbegriffe

Eine Gleichung, in der Ableitungen einer unbekanntem Funktion, z. B. $y(x)$, bis zur n -ten Ordnung auftreten, heißt eine **gewöhnliche DGL n -ter Ordnung**. Analog heißt eine Gleichung für eine Funktion von mehr als einer Variablen, z. B. $u(x, y, z)$, die partielle Ableitungen enthält, partielle DGL. Da wir uns in dieser Lehrveranstaltung nur mit gewöhnlichen DGL beschäftigen werden, verwenden wir als Abkürzung der Einfachheit halber nur DGL.

Eine Funktion $y(x)$ heißt **Lösung** oder **Integralkurve** einer DGL, wenn sie die DGL für alle x des Definitionsbereichs der Funktion erfüllt. Die **allgemeine Lösung** einer DGL n -ter Ordnung enthält n unabhängige, frei wählbare Parameter, die **Integrationskonstanten** genannt werden. Eine **spezielle (=partikuläre) Lösung** der DGL kann aus der allgemeinen Lösung gewonnen werden, indem aufgrund zusätzlicher Bedingungen, z. B. Anfangs- oder Randbedingungen, die Werte der n Integrationskonstanten fixiert werden. Wenn neben der DGL auch ausreichend viele Anfangsbedingungen gegeben sind, heißt die Suche nach der zugehörigen partikulären Lösung **Anfangswertproblem**.

Beispiele:

- Die DGL $y'(x) = 2x$ lässt sich durch unbestimmte Integration lösen. Ihre allgemeine Lösung lautet $y(x) = x^2 + C$ mit Integrationskonstante $C \in \mathbb{R}$.

- Die DGL $y'(x) = \lambda y(x)$ beschreibt für negatives λ z. B. radioaktiven Zerfall und für positives λ exponentielles Wachstum. Die allgemeine Lösung lautet $y(x) = Ce^{\lambda x}$ mit der Integrationskonstante $C \in \mathbb{R}$.
- Die 1-dimensionalen Bewegungen $x(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$ bilden die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung $m\ddot{x}(t) = F$ für eine konstante Kraft F und somit für eine konstante Beschleunigung $g = \frac{F}{m}$ einer Masse m . Der Anfangsort x_0 und die Anfangsgeschwindigkeit v_0 sind die Integrationskonstanten.
- Die harmonischen Schwingungen $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$ bilden die allgemeine Lösung der DGL $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$. Die Amplitude A und die Phase φ sind die Integrationskonstanten.

Oft schreibt man eine DGL, z. B. $y'(x) = -\lambda y(x)$, ohne Argument x , also $y' = -\lambda y$.

6.1.2 DGL 1. Ordnung

Wir betrachten DGL 1. Ordnung von der Form

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Dabei ist f eine vorgegebene Funktion, die die Steigung $y'(x)$ der gesuchten Funktion $y(x)$ an jedem Punkt $(x, y(x))$ ihres Graphen in der x - y -Ebene angibt.

Beispiele: $y'(x) = 2x$, $y'(x) = -\lambda y(x)$, $y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$.

An jedem Punkt (x, y) der x - y -Ebene wird also durch $f(x, y)$ eine Steigung (Richtung) vorgeschrieben, die von einer Lösung $y(x)$ erfüllt werden muss, wenn sie durch diesen Punkt geht. Die Funktion $f(x, y)$ wird als **Richtungsfeld** der DGL bezeichnet.

Beispiel (exponentielles Wachstum): Für eine Wachstumskonstante $\lambda \geq 0$ betrachten wir die DGL $y' = \lambda y$. Das Richtungsfeld $f(x, y) = \lambda y$ hängt nur von y ab. Die Integralkurven sind $y(x) = Ce^{\lambda x}$. Die Integrationskonstante C ist gleich dem Anfangswert $y(0)$. In Abbildung 6.1 ist das Richtungsfeld und zwei Lösungen für $\lambda = 0,15$ dargestellt.

6.1.2.1 Trennung der Variablen

DGL 1. Ordnung, die die Form $y'(x) = f(x) \cdot g(y)$ haben, heißen separabel und lassen sich mittels der Methode "Trennung der Variablen" in folgenden Schritten lösen:

1. Schreibe $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$.
2. Trenne die Variablen: $\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx$.
3. Integriere beide Seiten: $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$.
4. Löse die resultierende Gleichung falls möglich nach y auf.

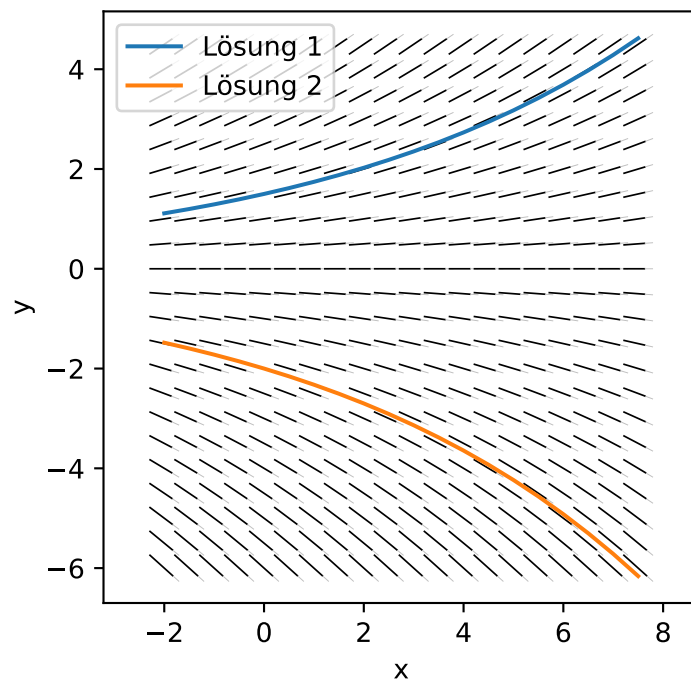


Abbildung 6.1: Exponentiellen Wachstum: Richtungsfeld und zwei Lösungen

Beispiel: Wir lösen die separable DGL $y' + y^2 = 0$.

$$\begin{aligned}
 y' &= -y^2 \\
 \frac{dy}{dx} &= -y^2 \\
 -\frac{1}{y^2} dy &= dx \\
 \int -\frac{1}{y^2} dy &= \int dx \\
 -\frac{y^{-1}}{-1} &= x + C \\
 \frac{1}{y} &= x + C \\
 y(x) &= \frac{1}{x + C}
 \end{aligned}$$

6.1.2.2 Substitutionen

DGL der Form $y' = f(ax + by + c)$ mit $a, b \neq 0, c \in \mathbb{R}$ werden durch die Substitution $u(x) := ax + by(x) + c$ in eine separable DGL für die Funktion $u(x)$ transformiert. Genauer: Durch Ableiten der Substitution $u = ax + by + c$ erhalten wir $u' = a + by'$, was durch Umformen $y' = \frac{u'-a}{b}$ ergibt.

Damit können wir die ursprüngliche DGL transformieren und trennen:

$$\begin{aligned}y' &= f(ax + by + c) \\ \frac{u' - a}{b} &= f(u) \\ u' &= a + bf(u) \\ \frac{du}{dx} &= a + bf(u) \\ \frac{1}{a + bf(u)} du &= dx\end{aligned}$$

Die DGL für $u(x)$ lässt sich also durch Trennen der Variablen lösen. Anschließend erhält man durch Rücksubstitution die Lösung für $y(x)$.

Analog werden DGL der Form $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ durch die Substitution $u(x) := \frac{y(x)}{x}$ in eine separable DGL für die Funktion $u(x)$ transformiert. Genauer: Wir schreiben die Substitution als $y(x) = x \cdot u(x)$. Ableiten dieser Gleichung liefert $y' = 1 \cdot u + x \cdot u'$. Damit können wir die ursprüngliche DGL transformieren und trennen:

$$\begin{aligned}y' &= f\left(\frac{y}{x}\right) \\ u + x \cdot u' &= f(u) \\ u + x \cdot \frac{du}{dx} &= f(u) \\ \frac{1}{f(u) - u} du &= \frac{dx}{x}\end{aligned}$$

Die DGL für $u(x)$ lässt sich also durch Trennen der Variablen lösen. Anschließend erhält man durch Rücksubstitution die Lösung für $y(x)$.

6.1.2.3 Lineare DGL 1. Ordnung

Achtung

Ab jetzt schreiben wir die zu suchende Funktion als $y(t)$ und ihre Ableitungen als $\dot{y}(t)$. Das machen wir, weil in sehr vielen Anwendungen die unabhängige Variable die Zeit t ist. Zudem ist es eine gute Übung, um sich freier von Bezeichnungen zu machen.

Eine DGL 1. Ordnung heißt **linear**, wenn sie in der Form

$$\dot{y}(t) + f(t) \cdot y(t) = g(t)$$

darstellbar ist. Ist $g(t) = 0$ für alle t , so heißt die lineare DGL **homogen**, ansonsten **inhomogen**. Für homogene, lineare DGL gilt die Superpositionsregel: Sind $y_1(t)$ und $y_2(t)$ Lösungen der DGL, dann ist auch jede Linearkombination $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ eine Lösung.

Beispiele:

- $\dot{y}(t) - t \cdot y(t) = 0$ ist linear und homogen.
- $t \cdot \dot{y}(t) + 2y(t) = e^t$ ist linear und inhomogen.
- $\dot{y}(t) + \tan(t) \cdot y(t) = 2 \sin(t) \cos(t)$ ist linear und inhomogen.
- $\dot{y}(t) + y^2(t) = 1$ ist nicht linear.
- $y(t) \cdot \dot{y}(t) + t = 0$ ist nicht linear.

Eine **homogene lineare DGL 1. Ordnung** $\dot{y}(t) + f(t) \cdot y(t) = 0$ kann durch Trennen der Variablen integriert werden. Die allgemeine Lösung lautet

$$y(t) = C e^{-\int f(t) dt} \text{ mit } C \in \mathbb{R}.$$

Für eine **inhomogene lineare DGL 1. Ordnung** $\dot{y}(t) + f(t) \cdot y(t) = g(t)$ gibt es unter anderem folgende zwei Lösungsmethoden:

- Aufsuchen einer partikulären Lösung: Diese Methode beruht auf der Tatsache, dass die allgemeine Lösung $y(t)$ der inhomogenen linearen DGL als Summe der allgemeinen Lösung $y_0(t)$ der zugehörigen homogenen linearen DGL und einer beliebigen partikulären Lösung $y_p(t)$ der inhomogenen linearen DGL darstellbar ist: $y(t) = y_0(t) + y_p(t)$. Dies gilt auch für lineare DGL höherer Ordnung.
- Die Methode der “Variation der Konstanten”, siehe z. B. [Pap15], verwendet zum Aufsuchen einer partikulären Lösung den Ansatz, die Integrationskonstante C der homogenen Lösung $y(t) = C e^{-\int f(t) dt}$ als Funktion $C(t)$ zu betrachten. Dieser Ansatz wird anschließend in die inhomogene DGL eingesetzt, um $C(t)$ zu bestimmen. Alternativ kann man die folgende Lösungsformel verwenden:

$$y(t) = \left[\int g(t) \cdot e^{\int f(t) dt} dt + C \right] e^{-\int f(t) dt} \text{ mit } C \in \mathbb{R}.$$

Ein sehr oft auftretender Spezialfall besteht aus den **linearen DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten**

$$\dot{y}(t) + ay(t) = b \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}.$$

Wir schreiben die allgemeine Lösung auf zwei alternative Arten:

$$y(t) = \left(y(0) - \frac{b}{a} \right) e^{-at} + \frac{b}{a}$$

$$y(t) = y(0) e^{-at} + \frac{b}{a} (1 - e^{-at})$$

Dabei wird die Integrationskonstante jeweils durch den Anfangszustand $y(0)$ angegeben. Das Verhalten der Lösung ist dadurch leicht interpretierbar:

- Falls $a < 0$, divergiert $y(t)$, ausser der Anfangszustand ist gleich dem steady state Wert: $y(0) = \frac{b}{a}$. Beim steady state (=Gleichgewichtszustand) bleibt $y(t)$ konstant, d. h. $\dot{y}(t) = 0$.
- Falls $a > 0$, konvergiert $y(t)$ vom Anfangswert $y(0)$ zum steady state Wert $\frac{b}{a}$. Der Anteil $y(0)e^{-at}$ beginnt bei $y(0)$ und geht gegen Null. Der Anteil $\frac{b}{a}(1 - e^{-at})$ beginnt bei Null und geht gegen $\frac{b}{a}$.

6.1.3 DGL 2. Ordnung

Wir beschränken uns auf lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Diese haben die Form

$$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = g(t)$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ und einer evtl. zeitabhängigen Inhomogenität $g(t)$. Falls $g(t) = 0$ für alle t , dann heißt die DGL homogen, ansonsten inhomogen. DGL von diesem Typ finden sehr viele Anwendungen in der Technik, da sie harmonische, gedämpfte, erzwungene Schwingungen modellieren, siehe z. B. [Wikipedia](#).

Beispiele:

- Die eindimensionale Bewegung eines Massenpunktes unter dem Einfluss einer linearen Rückstellkraft und einer Reibungskraft, die proportional zu seiner Geschwindigkeit ist: Um die zugehörige DGL zu bestimmen, verwenden wir Newtons Bewegungsgleichung und erhalten:

$$m\ddot{y}(t) = -d\dot{y}(t) - ky(t). \quad (6.1)$$

Bezeichnungen:

- m ... Masse des Massenpunktes
- $y(t)$... eindimensionaler Ort zum Zeitpunkt t
- $-d\dot{y}(t)$... Reibungskraft mit positiver Konstante d
- $-ky(t)$... lineare Rückstellkraft mit positiver Konstante k
- Elektrotechnik: Der Strom $i(t)$ als Funktion der Zeit t im [RLC-Schwingkreis](#) erfüllt die DGL

$$LC \frac{d^2 i}{dt^2}(t) + RC \frac{di}{dt}(t) + i(t) = 0,$$

wobei $\frac{d^2 i}{dt^2}(t)$ die zweite Ableitung von $i(t)$ bezeichnet.

6.1.3.1 Beispiel für Exponentialansatz

Fortsetzung des ersten Beispiels: Zur Bestimmung der Bewegung $y(t)$ des Massenpunktes schreiben wir zuerst die Bewegungsgleichung (6.1) in der Form:

$$\ddot{y} + \frac{d}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = 0.$$

Dann untersuchen wir, ob und, falls ja, für welche Werte von λ der Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$ die DGL löst. Einsetzen des Ansatzes in die DGL liefert

$$\begin{aligned} \lambda^2 e^{\lambda t} + \frac{d}{m} \lambda e^{\lambda t} + \frac{k}{m} e^{\lambda t} &= 0 \\ \lambda^2 + \frac{d}{m} \lambda + \frac{k}{m} &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= -\frac{d}{2m} \pm \sqrt{\frac{d^2 - 4mk}{4m^2}} \\ \lambda_{1,2} &= -\frac{d}{2m} \pm \sqrt{-1} \frac{\sqrt{4mk - d^2}}{2m} \\ \lambda_{1,2} &= -\frac{d}{2m} \pm i\omega. \end{aligned}$$

Dabei haben wir $\omega := \frac{\sqrt{4mk - d^2}}{2m}$ gesetzt und angenommen, dass $d^2 \leq 4mk$ gilt, d. h. dass die Dämpfung im Vergleich zur Rückstellkraft und zur Masse schwach ist. Unter dieser Annahme ist ω reell und wird als die Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung bezeichnet. Die Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung mit $d = 0$ wird mit ω_0 bezeichnet und hat den Wert $\omega_0 = \frac{\sqrt{4mk - 0}}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Wir bemerken, dass $\omega_0 \geq \omega$ gilt, Dämpfung die Kreisfrequenz also verkleinert.

Da die DGL (6.1) linear und homogen ist, ist die allgemeine Lösung die Linearkombination der beiden Exponentialfunktionen $e^{\lambda_1 t}$ und $e^{\lambda_2 t}$:

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

wobei die Konstanten C_1 und C_2 komplexe Zahlen sind. Da die DGL (6.1) linear und homogen ist, sind zudem sowohl der Real- als auch der Imaginärteil einer Lösung wieder Lösung. Ihre allgemeine reelle Lösung lautet daher

$$y(t) = e^{-\frac{d}{2m}t} [c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)]$$

mit reellen Konstanten c_1 und c_2 . Sie besteht aus der exponentiellen Dämpfung $e^{-\frac{d}{2m}t}$ und der ungedämpften harmonischen Schwingung $c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$ mit Kreisfrequenz ω .

6.1.3.2 Allgemeine Lösungsstruktur

Homogen mit konstanten Koeffizienten: Die allgemeine Lösung der homogenen linearen DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = 0$$

ist eine Linearkombination $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ von zwei sogenannten *Fundamentallösungen* $y_1(t)$ und $y_2(t)$. Diese sind Lösungen der DGL und erfüllen die Eigenschaft $y_1(t) \cdot \dot{y}_2(t) - y_2(t) \cdot \dot{y}_1(t) \neq 0$ für mindestens ein t . Jedes *Anfangswertproblem* lässt sich aufgrund dieser Eigenschaft eindeutig lösen. Der *Exponentialansatz* $e^{\lambda t}$ führt zur *charakteristischen Gleichung*

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

mit Lösungen λ_1 und λ_2 und folgenden zugehörigen Fundamentallösungen:

- λ_1 und λ_2 ungleich und reell: $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ und $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$, für negative λ_1 und λ_2 heißt dieser Fall *Kriechfall*
- $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$ und reell: $y_1(t) = e^{\lambda t}$ und $y_2(t) = t e^{\lambda t}$, für negatives λ heißt dieser Fall *Aperiodischer Grenzfall*
- $\lambda_{1,2} = \beta \pm j\omega$: $y_1(t) = e^{\beta t} \cos(\omega t)$ und $y_2(t) = e^{\beta t} \sin(\omega t)$, für negatives β heißt dieser Fall *Schwingfall*

Inhomogen mit konstanten Koeffizienten: Die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = g(t)$$

ist von der Form

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t)$$

Dabei ist $y_0(t)$ die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL $\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = 0$ und $y_p(t)$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL. Für letztere gibt es unterschiedliche Ansätze je nach der Form von $g(t)$, siehe z. B. [Pap15] Kapitel IV, Abschnitt 3, Seite 408f.

6.2 Beispiele

6.2.1 Trennung der Variablen

Wir lösen die DGL $y' = y$, siehe auch [Pap15] S. 359.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= y \\ \frac{1}{y} dy &= dx \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int dx \\ \ln |y| &= x + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ |y| &= e^{x+C} \\ y &= \pm e^C e^x \\ y &= K e^x, \quad K \neq 0\end{aligned}$$

Wir überprüfen noch, ob $K = 0$ auch eine Lösung liefert. Für $K = 0$ ist $y = 0$ und somit $y' = 0$. Einsetzen in die DGL zeigt, dass $y = 0$ auch eine Lösung ist. Insgesamt lautet die allgemeine Lösung der DGL daher $y(x) = K e^x$ mit $K \in \mathbb{R}$.

Dieses Beispiel ist mit dem Exponentialansatz, der für homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten geeignet ist, einfacher zu lösen. Wir setzen $y(x) = e^{\lambda x}$ und $y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$ in die DGL ein: $\lambda e^{\lambda x} = e^{\lambda x}$. Division durch $e^{\lambda x}$ liefert $\lambda = 1$ und $y(x) = e^x$ als Lösung. Da die DGL homogen linear ist, ist auch jedes Vielfache $y(x) = K e^x$ mit $K \in \mathbb{R}$ eine Lösung.

6.2.2 Substitution A

Wir lösen die DGL $y' = 2x - y$, siehe auch [Pap15] S. 364. Die DGL ist vom Typ $y'(x) = f(ax + by + c)$ mit $a = 2$, $b = -1$ und $c = 0$. Daher transformieren wir sie mit der Substitution $u(x) = ax + by + c = 2x - y$. Ableiten von $u = 2x - y$ nach x liefert $u' = 2 - y'$. Daher ist $y' = 2 - u'$. Einsetzen in die DGL ergibt

$$\begin{aligned}2 - u' &= u \\ -\frac{du}{dx} &= u - 2 \\ \frac{1}{u-2} du &= -dx \\ \ln |u-2| &= -x + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ |u-2| &= e^C e^{-x} \\ u-2 &= \pm e^C e^{-x} \\ u &= 2 + K e^{-x}, \quad K \neq 0\end{aligned}$$

Wir überprüfen noch, ob $K = 0$ auch eine Lösung liefert. Für $K = 0$ ist $u = 2$ und $u' = 0$. Einsetzen in die DGL $2 - u' = u$ zeigt, dass $u = 2$ auch eine Lösung ist. Die Rücksubstitution liefert die allgemeine Lösung der ursprünglichen DGL: $y(x) = 2x - 2 - K e^{-x}$ mit $K \in \mathbb{R}$.

6.2.3 Substitution B

Wir lösen die DGL $y' = \frac{x+2y}{x}$, siehe auch [Pap15] S. 364. Umformen der rechten Seite ergibt $y' = 1 + 2\frac{y}{x}$. Die DGL ist also vom Typ $y'(x) = f(\frac{y}{x})$. Aus der Substitution $u = \frac{y}{x}$ folgt $y' = 1 \cdot u + x \cdot u'$. Einsetzen in die DGL ergibt

$$\begin{aligned}u + x \cdot u' &= 1 + 2u \\x \cdot u' &= 1 + u \\x \frac{du}{dx} &= 1 + u \\\frac{1}{1+u} du &= \frac{1}{x} dx \\\ln|1+u| &= \ln|x| + C, C \in \mathbb{R} \\1+u &= \pm e^C x \\u &= Kx - 1, K \neq 0\end{aligned}$$

Wir überprüfen noch, ob $K = 0$ auch eine Lösung liefert. Für $K = 0$ ist $u = -1$ und $u' = 0$. Einsetzen in die DGL $x \cdot u' = 1 + u$ zeigt, dass $u = -1$ auch eine Lösung ist. Die Rücksubstitution liefert die allgemeine Lösung der ursprünglichen DGL: $y(x) = Kx^2 - x$ mit $K \in \mathbb{R}$.

6.2.4 Newtons Abkühlgesetz

Wir suchen die Temperatur $T_W(t)$ einer Tasse Glühwein als Funktion der Zeit t . Der Glühwein befindet sich in einer Umgebung mit konstanter Umgebungstemperatur T_U . Newtons Abkühlgesetz besagt, dass der Energieverlust pro Zeit durch Wärmeübertragung an die Umgebung, geschrieben als $\dot{Q}(t)$, die Gleichung

$$\dot{Q}(t) = -d[T_W(t) - T_U]$$

mit einer positiven Konstante d (Abkühlkoeffizient) erfüllt. Aus $\dot{Q}(t) = cm\dot{T}_W(t)$ (m die Masse des Glühweins, c seine spezifische Wärmekapazität) folgt

$$cm\dot{T}_W(t) = -d[T_W(t) - T_U]$$

als Differentialgleichung für die Temperatur $T_W(t)$. Wir führen die Temperaturdifferenz zur Umgebung als neue abhängige Variable ein: $T(t) := T_W(t) - T_U$, und beachten, dass $\dot{T}(t) = \dot{T}_W(t)$ gilt. Dadurch erhalten wir die kompaktere Differentialgleichung

$$\dot{T}(t) = -\lambda T(t)$$

mit dem einzigen Parameter $\lambda = \frac{d}{cm}$, der den Zeitverlauf bestimmt.

Lösung: $T(t) = T(0)e^{-\lambda t}$, d. h. die Temperaturdifferenz zur Umgebung klingt exponentiell vom Anfangswert $T(0)$ ab. Je größer λ ist, umso schneller kühlt der Glühwein aus.

6.2.5 Elektrischer Schaltkreis

Der Strom $I(t)$ als Funktion der Zeit t erfüllt in einem elektrischen Schaltkreis mit vorgegebener konstanter Spannung U und in Serie geschaltetem ohmschen Widerstand R und Induktivität L die DGL

$$L\dot{I} + RI = U.$$

Nach Umformen zu $\dot{I} + \frac{R}{L}I = \frac{U}{L}$ können wir die Lösungsformel verwenden. Die Lösung lautet

$$I(t) = I(0)e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Der Strom konvergiert zum steady state Wert $\frac{U}{R}$.

6.2.6 Verschmutztes Wasser

Ein See enthält $4 \cdot 10^7$ Liter reines Wasser zum Zeitpunkt $t = 0$. Anschließend fließt verschmutztes Wasser in den See, das 0,67 Liter Schadstoff und 10 Liter reines Wasser pro Sekunde in den See bringt. Wir nehmen an, dass sich das eingebrachte verschmutzte Wasser sofort mit dem Seewasser vermischt. Pro Sekunde fließen 10,67 Liter aus dem See hinaus. Wir bestimmen die Menge an Schadstoff im See als Funktion der Zeit. Mit $y(t)$ bezeichnen wir die Liter Schadstoff für Zeitpunkte $t \geq 0$. Der Anteil an Schadstoff pro Liter Seewasser beträgt $\frac{y(t)}{4 \cdot 10^7}$.

- Aufstellen der DGL: Die Änderung der Schadstoffmenge im See ist gleich der Abflussmenge an Schadstoff pro Zeit plus der Einflussmenge pro Zeit, d. h. $\dot{y} = -10,67 \frac{y}{4 \cdot 10^7} + 0,67$. Die Terme der DGL haben die Einheit Liter pro Sekunde.
- Lösung: $y(t) = \frac{0,67}{10,67} 4 \cdot 10^7 (1 - e^{-\frac{10,67}{4 \cdot 10^7} t})$
- Der steady state der Schadstoffmenge $y(t)$ ist $\frac{0,67}{10,67} 4 \cdot 10^7 \approx 2,51 \cdot 10^6$.
- Der steady state der Schadstoffkonzentration $\frac{y(t)}{4 \cdot 10^7}$ ist $\frac{0,67}{10,67} \approx 0,063$.

Wann werden 90 % des steady states erreicht? Antwort: nach ca. 100 Tagen:

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\frac{10,67}{4 \cdot 10^7} t} &= 0,9 \\ e^{-\frac{10,67}{4 \cdot 10^7} t} &= 0,1 \\ -\frac{10,67}{4 \cdot 10^7} t &= \ln(0,1) \\ t &= 862314 \text{ Sekunden} \approx 100 \text{ Tage} \end{aligned}$$

In Abbildung 6.2 ist der Verlauf der Konzentration und ihr steady state dargestellt.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

a = 10.67/4e7
b = 0.67
y0 = 0
t = np.linspace(0,365) # Tage
y_conc = ((y0 - b/a)*np.exp(-a*24*60*60*t) + b/a)/4e7*100 # Konzentration in %
y_conc_steady_state = b/a/4e7*100*np.ones_like(t) # steady state Konzentration in %

plt.figure(figsize=(4,3))
plt.plot(t, y_conc, label='Zeitverlauf')
plt.plot(t, y_conc_steady_state, '--', label='steady state')
plt.xlabel('Tage')
plt.ylabel('Konzentration (%)')
plt.legend(loc='best')
plt.grid(True)
```

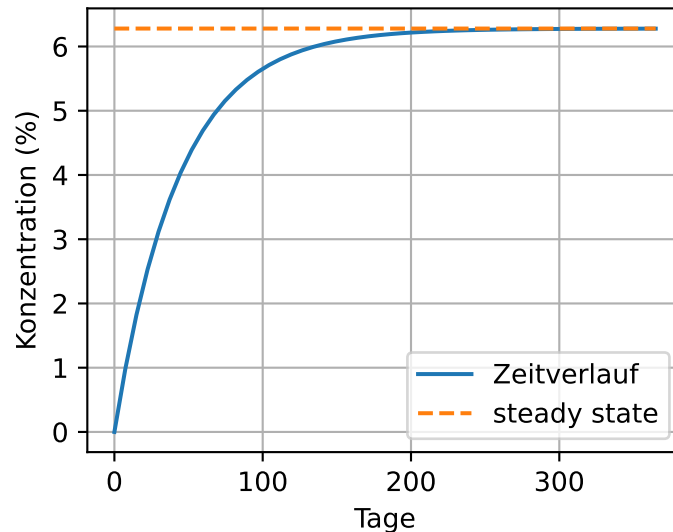


Abbildung 6.2: Verlauf der Konzentration und ihr steady state

6.2.7 Raumtemperatur

Um Mitternacht beträgt die Raumtemperatur in der FH Vorarlberg $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ und außen $-5\text{ }^{\circ}\text{C}$. Die Heizung fällt aus. Zwei Stunden später beträgt die Raumtemperatur nur noch $10\text{ }^{\circ}\text{C}$. Die Außentemperatur bleibt konstant auf $-5\text{ }^{\circ}\text{C}$. Wir bestimmen den Zeitverlauf der Raumtemperatur. Dazu verwenden wir $T(t)$ für die Raumtemperatur zum Zeitpunkt t und T_A für die Außentemperatur. Newtons Abkühlgesetz besagt, dass $\dot{T}(t) = -\lambda(T(t) - T_A)$. Wir wissen, dass $T(0) = 20$ und $T_A = -5$, aber der Parameter λ ist vorerst unbekannt. Die Parameter a und b der allgemeinen Form $\dot{y} + ay = b$ identifizieren wir als $a = \lambda$ und $b = \lambda T_A$. Daher lautet die allgemeine Lösung

$$T(t) = (T(0) - T_A) e^{-\lambda t} + T_A.$$

Aus der Bedingung $T(2) = 10$ können wir λ bestimmen:

$$\begin{aligned} 10 &= (20 + 5)e^{-\lambda 2} - 5 \\ 15 &= 25e^{-\lambda 2} \\ e^{-\lambda 2} &= 0.6 \\ -\lambda 2 &= \ln(0.6) \\ \lambda &= -0.5 \ln(0.6) \approx 0.2554 \end{aligned}$$

Die Lösung lautet daher $T(t) = 25e^{-\lambda t} - 5$. In Abbildung 6.3 ist der Verlauf der Raumtemperatur und ihr steady state dargestellt.

```
a = -0.5*np.log(0.6)
b = -0.5*np.log(0.6)*(-5)
T0 = 20
t = np.linspace(0, 24) # Stunden
T = (T0 - b/a)*np.exp(-a*t) + b/a
T_steady_state = b/a*np.ones_like(t)
```

```

plt.figure(figsize=(4, 3))
plt.plot(t, T, label='Raumtemperatur')
plt.plot(t, T_steady_state, '--', label='steady state = Aussentemperatur')
plt.xlabel('Stunde nach Mitternacht')
plt.ylabel('Temperatur (°C)')
plt.legend(loc='best')
plt.ylim(-10, 22)
plt.grid(True)

```

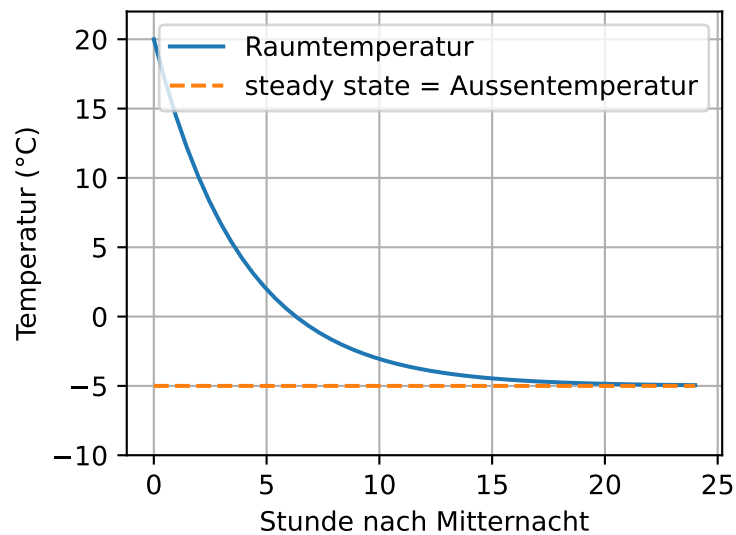


Abbildung 6.3: Verlauf der Raumtemperatur und ihr steady state

Wann beträgt die Raumtemperatur nur noch 5 °C?

$$\begin{aligned}
 5 &= 25e^{-\lambda t} - 5 \\
 10 &= 25e^{-\lambda t} \\
 e^{-\lambda t} &= 0,4 \\
 -\lambda t &= \ln(0,4) \\
 t &= -\frac{\ln(0,4)}{\lambda} \approx 3,587
 \end{aligned}$$

Antwort: ca. 3,6 Stunden nach Mitternacht.

6.2.8 Allgemeine Schwingungsgleichung und Resonanz

Die DGL einer mechanischen Schwingung und eines elektrischen Schwingkreises lassen sich auf folgende, oft verwendete allgemeine Form bringen:

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0.$$

Aufgabe: Für welche Werte von δ und ω_0 schwingt das System, d. h. die charakteristische Gleichung hat komplexe Lösungen? Bestimmen Sie die Frequenz ω für diesen Fall.

Lösung: $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$, $\delta^2 < \omega_0^2$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. Literatur: z. B. Dietmaier: Mathematik für Angewandte Wissenschaften. p. 440f.

Aufgabe: Für diesen Fall wird die allgemeine Lösung oft in der Form

$$y(t) = e^{-\delta t} [c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)]$$

als auch

$$y(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega t - \varphi)$$

geschrieben. Wie hängen diese zwei zusammen? Interpretieren Sie die beiden Formen, und machen Sie Beispielplots.

Lösung: $c_1 = A \cos(\varphi)$, $c_2 = A \sin(\varphi)$, Additionstheorem $\cos(\omega t) \cos(\varphi) + \sin(\omega t) \sin(\varphi) = \cos(\omega t - \varphi)$. Literatur: z. B. Dietmaier: Mathematik für Angewandte Wissenschaften. p. 440f. Abbildung 6.4 zeigt einen Beispielplot.

```
t = np.linspace(0, 10, 500)
A = 2 # Anfangsamplitude
delta = 0.2 # Dämpfungsfaktor
omega = 2*np.pi/3 # Kreisfrequenz
phi = np.pi # Phasenverschiebung
y = A*np.exp(-delta*t)*np.cos(omega*t - phi)

plt.figure(figsize=(4, 3))
plt.plot(t, y)
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('y')
plt.ylim(-A, A)
plt.grid(True)
```

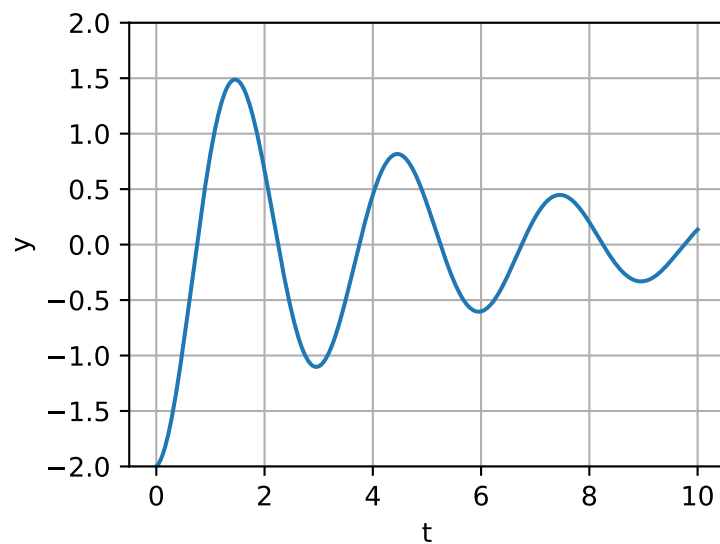


Abbildung 6.4: Beispiel eines Schwingfalls

Aufgabe: Eine harmonisch erzwungene Schwingung hat die allgemeine Form

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = a \cos(\tilde{\omega}t).$$

Eine partikuläre Lösung lautet

$$y_p(t) = A \cos(\tilde{\omega}t - \varphi)$$

mit

$$A = \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + 4\delta^2\tilde{\omega}^2}}.$$

Bei welchem Wert der Erregerfrequenz $\tilde{\omega}$ ist die Amplitude A maximal, d. h. herrscht Resonanz?

Lösung: Ableiten nach $\tilde{\omega}$ liefert die Resonanzfrequenz $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} < \omega < \omega_0$. Literatur: Papula: Band2 IV, 4.1.4; Feynman: The Feynman Lectures on Physics, Vol. 1, [Chapter 23 Resonance](#). Abbildung 6.5 zeigt die Amplitude in Abhängigkeit der Erregerfrequenz.

```

delta = 0.15
omega_0 = 3 # delta < omega_0
omega_t = np.linspace(0, 10, num=500)
a = 1

A = a/np.sqrt( (omega_0**2 - omega_t**2)**2 + 4*delta**2*omega_t**2 )
omega_r = np.sqrt(omega_0**2 - 2*delta**2)

plt.figure(figsize=(4, 3))
plt.plot(omega_t, A, label='Amplitude A')
y0, y1 = plt.ylim()
plt.vlines(omega_r, y0, y1, linestyle='--', label='Resonanzfrequenz $\omega_r$')
plt.ylim(y0, y1)
plt.xlabel('Erregerfrequenz')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.legend()
plt.grid(True)

```

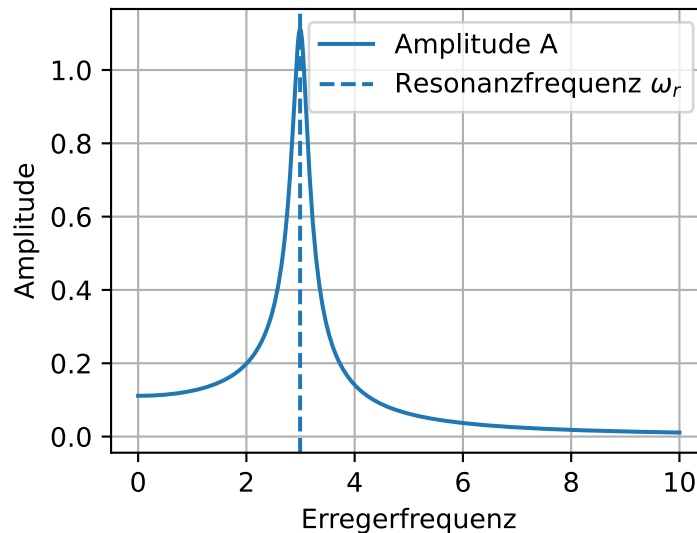


Abbildung 6.5: Amplitude in Abhängigkeit der Erregerfrequenz

6.2.9 Numerische Lösungen einer DGL

Wir betrachten folgendes Anfangswertproblem: $y'(x) = \frac{y(x)}{2(x+1)}$ für $x \geq 0$, Anfangswert $y(0) = 2$.

Analytische Lösung: Die DGL lässt sich mittels Trennung der Variablen lösen, und man erhält für $x \geq 0$ die allgemeine Lösung $y(x) = C\sqrt{2(x+1)}$. Aus der Anfangsbedingung $y(0) = 2$ folgt, dass die Integrationskonstante den Wert $C = \sqrt{2}$ hat. Die Lösung des Anfangswertproblems lautet daher $y(x) = 2\sqrt{x+1}$. Diese Lösung nennt man eine analytische Lösung. Sie entsteht durch exaktes Umformen des Ausgangsproblems und liefert eine exakte Lösungsformel.

Numerische Lösungen: Oft gelingt es nicht, eine analytische Lösung zu finden, und man versucht, meist am Computer, durch numerische Methoden (d. h. durch Rechnen mit konkreten Zahlenwerten) eine näherungsweise (approximative) Lösung zu berechnen. Das einfachste Verfahren zur numerischen Lösung eines Anfangswertproblems $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ ist das sogenannte **Explizite Euler-Verfahren**. Für eine Schrittweite $h > 0$ und Schritte $k = 1, 2, 3, \dots$ berechnet man dabei iterativ die folgenden Stützstellen der numerischen Lösung:

$$\begin{aligned}x_k &= x_{k-1} + h \\y_k &= y_{k-1} + f(x_{k-1}, y_{k-1}) \cdot h\end{aligned}$$

Geometrisch wird dabei bei jeder Stützstelle (x_{k-1}, y_{k-1}) die Tangente gelegt. Diese hat die Steigung $f(x_{k-1}, y_{k-1})$. Dann geht man in x -Richtung einen h -Schritt weit, folgt dabei der Tangente und kommt so zur nächsten Stützstelle (x_k, y_k) . Ein deutlich besseres Verfahren ist in der SciPy-Funktion `odeint` implementiert.

Vergleich der Methoden: Wir erstellen zuerst in Python einen Plot des Richtungsfeldes der DGL. Anschließend plotten wir die analytische Lösung, berechnen die beiden numerischen Lösungen und zeichnen auch diese diese in den Plot ein, siehe Abbildung 6.6.

```
from scipy.integrate import odeint

x = np.arange(0, 10.5, 0.5)
y = np.arange(0, 8.5, 0.5)
X, Y = np.meshgrid(x, y)

dX = np.ones_like(X)
dY = 0.5*Y/(X+1)

plt.figure(figsize=(5, 5))
plt.quiver(X, Y, dX, dY, headwidth=0.0, scale = 30, pivot = 'middle')
# plt.axis('equal')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y');
# plt.grid(True)

# exact analytical solution:
x = np.linspace(0, 10)
y_exact = 2*np.sqrt(x + 1)
plt.plot(x, y_exact, '-b', label='exact')

# numerical solutions:
x_0 = 0
y_0 = 2
```

```

def my_f(y, x):
    # Note: inputs must be in order y, x for odeint!
    return 0.5*y/(x+1)

# with Euler:
h = 0.5
x_euler = [x_0]
y_euler = [y_0]
x_k = x_0
y_k = y_0
while x_k < 10:
    y_k = y_k + my_f(y_k, x_k)*h
    x_k = x_k + h
    x_euler.append(x_k)
    y_euler.append(y_k)
plt.plot(x_euler, y_euler, '-r', label='Euler')

# with odeint:
x = np.linspace(0, 10)
y_odeint = odeint(my_f, y_0, x)
plt.plot(x, y_odeint, '-.y', label='odeint')

plt.legend();

```

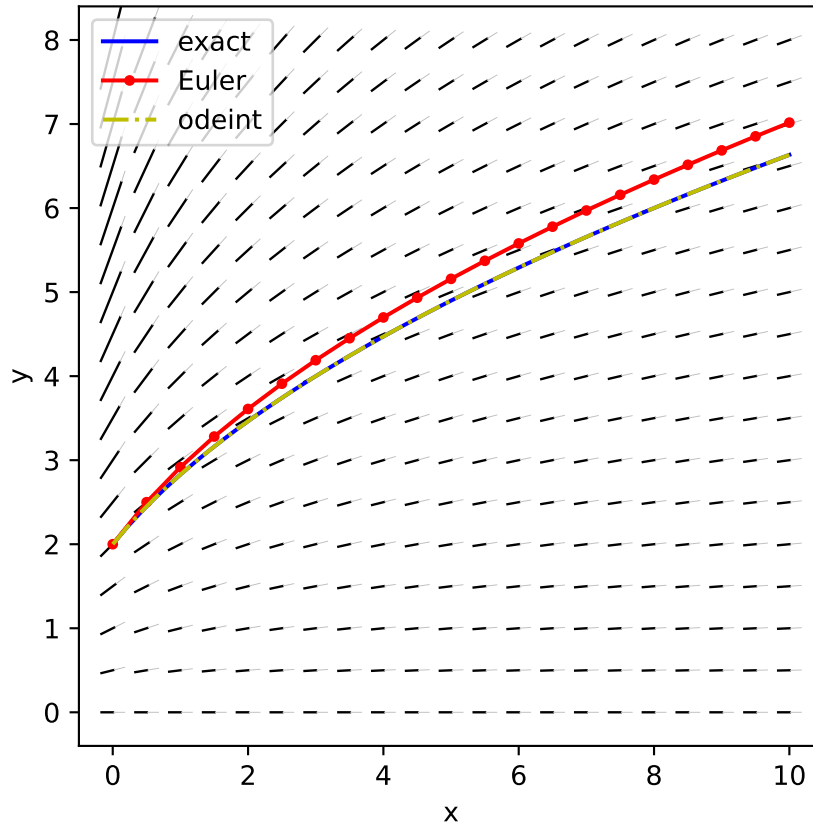


Abbildung 6.6: Vergleich der analytischen Lösung mit numerischen Lösungen

6.3 Aufgaben

6.3.1 Allgemeine und partikuläre Lösung

1. Zeigen Sie, dass die Funktion $y(x) = C \frac{x}{1+x}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $x(1+x)y'(x) - y(x) = 0$ ist. Wie lautet die partikuläre Lösung zum Anfangswert $y(1) = 8$?
2. Die Aufladung eines Kondensators der Kapazität C ab dem Zeitpunkt $t = 0$ über einen ohmschen Widerstand R auf die Endspannung u_0 erfolgt nach dem Exponentialgesetz $u_C(t) = u_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$. Skizzieren Sie die Funktion $u_C(t)$. Zeigen Sie, dass diese Funktion eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $RCu'_C(t) + u_C(t) = u_0$ ist, die diesen Einschaltvorgang beschreibt. Erstellen Sie in Python Plots der Funktion $u_C(t)$ für verschiedene Werte von C und R .

Quellen:

1. [Pap15], Kapitel IV Gewöhnliche Differentialgleichungen, Übungsaufgaben zu Abschnitt 1, Aufgabe 1
2. [Pap15], Kapitel IV Gewöhnliche Differentialgleichungen, Übungsaufgaben zu Abschnitt 1, Aufgabe 3

6.3.2 Trennung der Variablen

Lösen Sie folgenden DGL mit der Methode der Trennung der Variablen.

1. $y\dot{y} = te^t$
2. $\dot{y}(1+t^2) = ty$
3. $y' = 5x^4(y+1)$

Quellen:

1. [Gol+18] S. 516
2. [Pap15] S. 520
3. [Pap15] Kapitel IV, Abschnitt 2, Aufgabe 20e

6.3.3 Allgemeine Lösung

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = \frac{x^2+2}{y}$.

Quelle: [BC14] p. 23, problem 4.3

6.3.4 Anfangswertprobleme

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

1. $yy' = \cos(2x)$, $y(0) = -1$.
2. $y' = \frac{-x}{y}$, $y(0) = 1$.
3. $y' + \cos(x)y = 0$, $y(\pi/2) = 2\pi$

6.3.5 Substitution 1

Lösen Sie das Anfangswertproblem $yy' = x + \frac{y^2}{x}$, $y(1) = \sqrt{2}$ mittels einer geeigneten Substitution.

Quelle: [Pap15] Kapitel IV, Abschnitt 2, Aufgabe 3

6.3.6 Substitution 2

Lösen Sie das Anfangswertproblem $x^2y' = y^2 + xy$, $y(1) = -1$ mittels einer geeigneten Substitution.

Quelle: [Pap15] Kapitel IV, Abschnitt 2, Aufgabe 6a

6.3.7 Gemischte Aufgaben

Lösen Sie die folgenden DGL, und machen Sie die Probe.

1. $y' = -\frac{x^2}{y^3}$, $y(0) = 1$.
2. $y' = \frac{\sin^2(x)}{y}$, $y(\pi/2) = 0$.
3. $y' = \sinh(x+y) + \cosh(x+y)$, *Hinweis:* Stellen Sie die hyperbolischen Funktionen als Exponentialfunktionen dar.

6.3.8 Bewegung eines Körpers

Ein Körper bewegt sich entlang der positiven x -Achse. Zur Zeit $t = 0$ befindet er sich im Punkt $x = 10$ m. Die Bewegung erfolgt so, dass das Produkt aus Ort $x(t)$ und Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ konstant $10 \text{ m}^2/\text{s}$ ist. Berechnen Sie den Ort $x(t)$ und die Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ als Funktionen der Zeit t .

6.3.9 Quadratischer Luftwiderstand

Ein Auto mit Masse m und Anfangsgeschwindigkeit v_0 bewegt sich nur unter dem Einfluss des als quadratisch von der Geschwindigkeit abhängig angenommenen [Luftwiderstands](#).

1. Erklären Sie, warum die Geschwindigkeit $v(t)$ des Autos die DGL $\dot{v}(t) = -\frac{c}{m}v(t)^2$ erfüllt.
2. Lösen Sie das Anfangswertproblem und erstellen Sie einen Plot der Lösung in Python für vernünftige Werte der Parameter.

6.3.10 Menge an CO_2 in einem Raum

Die Luft in einem Raum voller Menschen enthält im Volumenanteil 0,25 % Kohlendioxid (CO_2). Eine Klimaanlage wird eingeschaltet und bläst mit einer Geschwindigkeit von 500 Kubikmeter pro Minute Frischluft in den Raum. Die frische Luft vermischt sich mit der verbrauchten Luft, und das Gemisch verlässt den Raum mit einer Geschwindigkeit von 500 Kubikmeter pro Minute. Die frische Luft enthält 0,01 % CO_2 , und der Raum hat ein Volumen von 2500 Kubikmetern.

1. Bestimmen Sie die DGL, die das Volumen $y(t)$ an CO_2 im Raum zu jedem Zeitpunkt t erfüllt. Lösen Sie das Anfangswertproblem, und machen Sie einen Plot der Lösung in Python.
2. Das in 1. entwickelte Modell ignoriert das durch die Atmung der Personen im Raum erzeugte CO_2 . Nehmen wir an, dass die Menschen im Raum 0,08 Kubikmeter CO_2 pro Minute produzieren. Berücksichtigen Sie in einer neuen DGL diese zusätzliche CO_2 -Quelle. Lösen Sie das Anfangswertproblem, und machen Sie einen Plot der Lösung in Python zum Vergleich mit der Lösung in 1..

Quelle: [Gol+18] p.546, Exercise 21

6.3.11 Linearer Luftwiderstand 1

Eine Person mit einer Masse von 70 kg springt mit einem offenen Fallschirm ohne Anfangsgeschwindigkeit aus einer Höhe von 1000 m. Die Luftwiderstandskraft sei gleich $140v(t)$ Newton, wobei $v(t)$ die Geschwindigkeit der Person in Metern pro Sekunde bezeichnet.

1. Bestimmen Sie die DGL für $v(t)$. Lösen Sie das Anfangswertproblem und erstellen Sie einen Plot der Lösung in Python.
2. Bestimmen Sie die Grenzggeschwindigkeit und graphisch die Zeit bis zum Bodenkontakt.

Quelle: [BC14] p.60, Exercise 7.12

6.3.12 Linearer Luftwiderstand 2

Ein Körper mit einer Masse von 2 kg fällt mit einer anfänglichen Sinkgeschwindigkeit von 4 m/s aus einer Höhe von 1000 m. Die Luftwiderstandskraft sei proportional zu seiner Geschwindigkeit, und seine daraus resultierende Grenzgeschwindigkeit (steady state) sei 40 m/s. Bestimmen Sie seine Geschwindigkeit als Funktion der Zeit und seinen Ort als Funktion der Zeit. Verwenden Sie für die Erdbeschleunigung den Wert 10 m/s^2

Quelle: [BC14] p. 61f, problem 7.13

6.3.13 RL Schaltung

Die DGL, die die elektrische Stromstärke $I(t)$ (A) zu einem Zeitpunkt t (s) in einer RL-Schaltung beschreibt, ist gegeben durch

$$L\dot{I} + RI = U,$$

wobei R (Ω) den Widerstand, L (H) die Induktivität und U (V) die Spannung ist. Eine gegebene Schaltung habe eine Spannung von 5 V, einen Widerstand von 50Ω , eine Induktivität von 1 H sowie anfangs eine Stromstärke $I(0) = 0$. Berechnen Sie die Stromstärke $I(t)$ für $t \geq 0$, und erzeugen Sie einen Plot der Lösung in Python.

Quelle: [BC14] p.52, p.65, Exercise 7.19

6.3.14 Lineare DGL 1. Ordnung mit variablen Koeffizienten 1

Lösen Sie die DGL $\dot{y}(t) + ty(t) = 4t$.

6.3.15 Lineare DGL 1. Ordnung mit variablen Koeffizienten 2

Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\ln(x)}{x}$ und $y(1) = 1$ für $x > 0$.

Quelle: [Pap15] Kapitel IV, Abschnitt 2: 16c

6.3.16 Lineare DGL 1. Ordnung mit variablen Koeffizienten 3

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe $xy' - y = x^2 \cos(x)$, $y(\pi) = 2\pi$ für $x > 0$.

Quelle: [Pap15] Kapitel IV, Abschnitt 2: 16a

6.3.17 Lineare DGL 1. Ordnung mit variablen Koeffizienten 4

Lösen Sie die folgenden DGL bzw. Anfangswertprobleme.

1. $y' - y = e^x$, $y(1) = 0$.
2. $y' - \frac{2}{x}y = x^2 e^x$
3. $y' + \tan(x)y = 2x \cos(x)$, $y(0) = -1$.
4. $y' + \cot(x)y = 5e^{\cos(x)}$

6.3.18 Lineare DGL 1. Ordnung mit variablen Koeffizienten 5

Lösen Sie die folgende DGL, und machen Sie die Probe.

$$y' + \sin(x)y = \sin^3(x)$$

6.3.19 Lineare DGL 1. Ordnung mit variablen Koeffizienten 6

Lösen Sie die folgende nicht-lineare DGL mit $k \in \mathbb{R}$, indem Sie sie mittels der Substitution $u(x) = e^y(x)$ in eine lineare DGL transformieren, und machen Sie die Probe.

$$e^y y' = k(x + e^y) - 1$$

6.3.20 Newtonsches Abkühlungsgesetz 1

Eine hungrige Studentin schaltet den Ofen ein und legt eine kalte Pizza aufs Blech, ohne den Ofen vorzuheizen. Sei $T_P(t)$ die Temperatur der Pizza und $T_O(t)$ die Ofentemperatur ($^{\circ}\text{C}$) jeweils t Minuten, nachdem der Ofen eingeschaltet wurde. Nach dem *Newtonschen Abkühlungsgesetz* ist die Temperaturänderungsrate proportional zur Temperaturdifferenz von Pizza zu Ofen:

$$\dot{T}_P(t) = -k[T_P(t) - T_O(t)],$$

wobei k eine positive Konstante ist. Angenommen die Ofentemperatur ist für $0 \text{ min} \leq t \leq 8 \text{ min}$ gegeben durch $T_O(t) = 20 + 30t$, mit $k = 0.1 \text{ min}^{-1}$ und einer anfänglichen Pizzatemperatur von 4°C .

1. Bestimmen Sie die Temperatur der Pizza in den ersten 8 Minuten.
2. Plotten Sie die Temperatur der Pizza über die ersten 8 Minuten.

Quelle: [Gol+18] p. 526f

6.3.21 Newtonsches Abkühlungsgesetz 2

Ein Körper mit einer unbekanntem Temperatur wird in einen Raum mit konstanter Umgebungstemperatur von 30°C platziert. Nach 10 Minuten ist die Temperatur des Körpers 0°C und nach 20 Minuten ist sie 15°C . Bestimmen Sie die unbekanntem Anfangstemperatur.

Hinweis: Newtonsches Abkühlungsgesetz $\dot{T}(t) = -k[T(t) - T_U]$

Quelle: [BC14] Aufgabe 7.10, S. 59

6.3.22 Solarthermie

Das Heizungssystem eines Gebäudes bestehe aus Solarkollektoren und einem Warmwasserspeicher. Der Warmwasserspeicher habe eine Zeitkonstante von $\frac{1}{k} = 50$ Stunden, d. h. er kühlt ohne Wärmezufuhr nach dem Newtonschen Abkühlungsgesetz $\dot{T}(t) = -k[T(t) - T_U(t)]$ aus, wobei $T_U(t)$ die Umgebungstemperatur zur Stunde t ist. Der solare Eintrag führt pro Stunde zu einer Temperaturerhöhung um 2°C im Speicher. Um 9 Uhr morgens ($t = 0$) habe der Speicher eine Wassertemperatur von 30°C und die Umgebungstemperatur sei den ganzen Tag über bei 20°C .

1. Stellen Sie die Differentialgleichung inkl. Anfangsbedingung auf, die den Temperaturverlauf des Warmwasserspeichers bei Sonneneinstrahlung ab 9 Uhr beschreibt.
2. Lösen Sie dieses Anfangswertproblem.

Quelle: [Far06] Section 2.5, Problem 14, p. 76.

6.3.23 Elektroautobatterie

Das Elektroauto Think City verfügt über eine Zebra-Batterie (Natrium-Nickelchlorid) mit einer maximalen Lade- und Entladeleistung von $P_{\max} = 30$ kW und einer Kapazität von $E_{\max} = 20$ kWh. Ein elektrischer Widerstand in der Batterie wandelt elektrische Energie in Wärme um, die die Batterie während dem Laden und Entladen auf Betriebstemperatur hält. Dieser Widerstand und folglich auch die resultierenden thermischen Verluste hängen linear vom momentanen Ladezustand der Batterie ab, bei einer Verlustleistung von minimal $I_{\min} = 40$ W und maximal $I_{\max} = 120$ W. Die in der Batterie gespeicherte Energie kann demnach für $E(t) > 0$ beschrieben werden durch:

$$\dot{E}(t) = -I_{\max} + \frac{I_{\max} - I_{\min}}{E_{\max}} E(t) + P(t)$$

1. Skizzieren Sie die thermischen Verluste in Abhängigkeit der gespeicherten Energie und erklären Sie die Differentialgleichung.
2. Lösen Sie das Anfangswertproblem $E(0) = 10$ kWh bei einer konstanten Ladeleistung von $P = 20$ kW. Wann ist die Batterie vollständig geladen?
3. Bei einer konstanten Entladeleistung von $P = -10$ kW, wie hoch ist der Energieinhalt der Batterie nach einer Stunde, wenn die Batterie zu Beginn voll geladen war?

6.3.24 Mischung

Ein Tank enthält ursprünglich 200 Liter reines Wasser. Eine Salzlösung mit 1 kg Salz pro 4 Liter Wasser wird bei einer Rate von 12 Liter pro Minute in den Tank eingebracht. Salz und Wasser durchmischen sich perfekt, und 12 Liter der Mischung fließen pro Minute wiederum aus dem Tank heraus.

1. Stellen Sie die Differentialgleichung auf, die die Menge (in kg) an Salz im Tank über die Zeit hinweg beschreibt.
2. Lösen Sie diese Differentialgleichung.
3. Bestimmen Sie, falls vorhanden, den steady state.
4. Skizzieren Sie die Lösung.

Quelle: [Far06] Example 1, p. 61f.

6.3.25 Aufladen eines Kondensators

Das Aufladen eines Kondensators mit der Kapazität C über einen ohmschen Widerstand R wird durch die lineare Differentialgleichung

$$RC\dot{u}_C(t) + u_C(t) = u(t)$$

beschrieben. Dabei ist $u(t)$ die von außen angelegte Spannung und $u_C(t)$ die Spannung am Kondensator.

1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung bei einer konstanten äußeren Spannung $u(t) = u_0$.
2. Wie lautet die Lösung für den Anfangswert $u_C(0) = 0$? Skizzieren und beschreiben Sie die Lösung.

Quelle: [Pap15] Kapitel IV, Abschnitt 2, Aufgabe 26

6.3.26 Lineare DGL 2. Ordnung 1

Lösen Sie die Differentialgleichung $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 0$ mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 2$ und $\dot{y}(0) = -3$.

6.3.27 Lineare DGL 2. Ordnung 2

Bestimmen Sie die Lösungen folgender GDGL bzw. Anfangswertprobleme. Beschreiben Sie die Lösungen und deren Verhalten für $x \rightarrow \infty$.

1. $y''(x) + 5y'(x) - 6y(x) = 0$
2. $y''(x) - y(x) = 0$, $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$

Quelle: [Far06] Sec. 3.4., Example 1, p. 131f.

6.3.28 Lineare DGL 2. Ordnung 3

Wir betrachten die GDGL $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^{3x}$.

1. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{4}e^{3x}$ eine partikuläre Lösung ist.
2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

Quelle: [BC14] Aufgabe 8.23, S. 79.

6.3.29 Lineare DGL 2. Ordnung 4

Bestimmen Sie die Lösungen folgender Anfangswertprobleme und beschreiben Sie die Lösungen und deren Verhalten für $x \rightarrow \infty$.

1. $y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 0$, $y(0) = 1$ und $y'(0) = 2$
2. $y''(x) + 8y'(x) + 20y(x) = 0$, $y(0) = 1$ und $y'(0) = 6$

Quelle: [Die14] p. 474, Aufgaben 12.9 b und c

6.3.30 Mehr Aufgaben

- [\[Pap15\]](#) Kapitel IV
 - Abschnitt 1, Aufgaben 1 - 4
 - Abschnitt 2, Aufgaben 1 - 10, 13 - 28
 - Abschnitt 3, Aufgaben 1 - 14
- [\[Pap20\]](#) Kapitel G Gewöhnliche Differentialgleichungen
 - Abschnitt 1 Differentialgleichungen 1. Ordnung: G1 - G44
 - Abschnitt 2 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten: G53 - G71
- [\[Pap19\]](#) Kapitel IX Gewöhnliche Differentialgleichungen: Beispiele 1 - 16

7 Scientific Computing

7.1 Einleitung

Motivation

Wenn man es mit komplexen Modellen, vielen Daten, oder nur numerisch lösbaren Problemen zu tun hat, verwendet man in der Mathematik sehr gerne den Computer (deutsch: Rechner, to compute = berechnen) in Verbindung mit einer passenden Software. Aber auch zum Visualisieren und zum Überprüfungen von Handrechnungen ist der Computer sehr hilfreich.

Unter dem Begriff “Scientific Computing” (deutsch: Wissenschaftliches Rechnen) versteht man die computergestützte Entwicklung von Modellen und Algorithmen zur Simulation und Optimierung, um Fragestellungen aus den Natur-, Ingenieur- und Wirtschaftswissenschaften zu beantworten.

Im Diesem Kapitel finden Sie:

- eine Anleitung zur einfachen Installation von Python und Python-Paketen auf Ihrem Computer
- eine kurze Einführung in jene ersten, überschaubaren Python-Kenntnisse, die wir in dieser Lehrveranstaltung verwenden.

Warum Python für wissenschaftliches Rechnen? [Python](#) ist eine freie, offene, plattformunabhängige, üblicherweise interpretierte, höhere Programmiersprache. Python Code ist gut lesbar und einfach zu lernen. Es gibt sehr viele Pakete und Einsatzgebiete für Python, siehe [PyPI - the Python Package Index](#). Für den Bereich des wissenschaftlichen Rechnens sind insbesondere folgende Python-Pakete nützlich:

- [NumPy](#): NumPy bietet Unterstützung für große, mehrdimensionale Arrays (Vektoren, Matrizen, ...) sowie eine große Sammlung von high-level mathematischen Funktionen, um mit diesen Arrays zu arbeiten.
- [Matplotlib](#): eine Grafikbibliothek, die jener von Matlab sehr ähnlich ist
- [SciPy](#): SciPy enthält Module für Optimierung, lineare Algebra, Integration, Interpolation, spezielle Funktionen, Signal- und Bildverarbeitung, Solver für gewöhnliche Differentialgleichungen und andere in Wissenschaft und Technik übliche Aufgaben.

Python erfreut sich einer großen und wachsenden Beliebtheit und besitzt daher eine umfangreiche und breitgefächert Community. So ziemlich jedes Problem mit Lösung/en findet man z. B. unter [stackoverflow](#). Der Name bezieht sich übrigens auf die englische Komikergruppe Monty Python.

Hinweis

In dieser Lehrveranstaltung verwenden wir den Computer nur einführend, vereinzelt und unterstützend für Visualisierungen, Überprüfungen von Handrechnungen und Berechnungen, die von Hand zu aufwendig wären. Dieses ersten Scientific Computing Kompetenzen sind für diese Lehrveranstaltung nicht prüfungsrelevant, sie werden in den anschließenden Semestern aber

vertieft und sind ab dem zweiten Semester prüfungsrelevant.

Zu den alternativen Programmiersprachen im Bereich wissenschaftliches Rechnen zählen:

- [Julia](#): frei, offen und plattformunabhängig
- [R](#): frei, offen und plattformunabhängig
- [Matlab](#): kommerziell
- [Mathematica](#): kommerziell

7.2 Installation

Wir verwenden in dieser Lehrveranstaltung [Thonny](#), eine integrierte Entwicklungsumgebung für Python, die sich an Anfänger richtet. Thonny ist übersichtlich, einfach zu bedienen und wie Python frei, offen und plattformunabhängig.

Unter [thonny.org](#) finden Sie Installationsanweisungen, FAQ und ein Wiki. Wenn Sie im `Tools` Menü `Manage packages...` auswählen, können Sie Python-Pakete installieren, aktualisieren und deinstallieren.

7.3 Einführung

Nach einem Tutorial zum Arbeiten mit Thonny werden einige typische Python-Code-Schnipsel zur Verfügung gestellt. Wer Python von Grund und gründlich lernen möchte, kann z. B. die folgenden Bücher [[LL20](#); [Kof21](#)] verwenden

- [Programming for Computations - Python. A Gentle Introduction to Numerical Simulations with Python 3.6.](#) von Svein Linge und Hans Petter Langtangen, 2. Auflage, 2020 => PDF-Download im FHV-Netz möglich!
- [Python - Der Grundkurs](#) von Michael Kofler, 2. Auflage, 2021

7.3.1 Arbeiten mit Thonny

Die Seite [Thonny: The Beginner-Friendly Python Editor](#) bietet einen guten Einstieg in das User Interface, den Code Editor, den Package Manager und einige weitere wichtige Features von Thonny.

7.3.2 Python als Taschenrechner

In der Python-Shell können Sie intuitiv Rechnungen eintippen. Hier ein paar Beispiele:

```
(42 + 137)/0.815
```

```
219.6319018404908
```

Achtung: Das Dezimaltrennzeichen ist im Englischen ein Punkt, und Potenzieren wird mit `**` implementiert!

```
1.23**45
```

```
11110.40818513195
```

Um die elementaren mathematischen Funktionen zu verwenden, müssen Sie zuerst, und nur einmal, das NumPy-Paket importieren. Wir verwenden das Kürzel `np`, um die Funktionen von NumPy anzusprechen.

```
import numpy as np  
  
np.sin(np.pi/2)
```

```
1.0
```

Kommentare beginnen mit einem `#`.

```
np.log(1) # natural logarithm of one
```

```
0.0
```

7.3.3 Komplexe Zahlen

```
# absolute value (or modulus or magnitude) of a complex number z:  
z = -3 + 4j  
  
np.abs(z)
```

```
5.0
```

```
np.angle(z) # in radians
```

```
2.214297435588181
```

```
np.angle(z, deg=True) # in degrees
```

```
126.86989764584402
```

```
3*np.exp(1j*np.pi) # polar form to cartesian form
```

```
(-3+3.6739403974420594e-16j)
```

Beachten Sie, dass $3.6739403974420594e-16$ gleich $3,6739403974420594 \cdot 10^{-16}$ ist. Das ist im Rahmen der numerischen Rechengenauigkeit “praktisch Null”. Vergleichen Sie den exakten Wert $3 \cdot e^{j\pi} = 3 \cos(\pi) + 3j \sin(\pi) = 3 \cdot (-1) + 3j \cdot 0 = -3$.

7.3.4 Formatierte Ausgabe

```
name = "Klaus"
like_math = True
age = 50
value = 12.3456789

print(f"Hallo! My name is {name}.")
print(f"I {like_math} = True")
print(f"I am {age} years old. These are about {age*365} days.")
print(f"A value: {value:.2f}") # float with two decimal places
```

```
Hallo! My name is Klaus.
I like_math = True
I am 50 years old. These are about 18250 days.
A value: 12.35
```

7.3.5 Listen und Vektoren

In der Mathematik ist ein Vektor des \mathbb{R}^n eine geordnete Liste von n reellen Zahlen. In Python werden Listen (nicht nur von Zahlen) z. B. mit eckigen Klammern erzeugt:

```
a = [-3, 5.7, 8]
b = [2.1, 0, -8]
```

Allerdings ist z. B. die Addition von Python-Listen nicht elementweise wie die Addition von Vektoren in der Mathematik:

```
a + b
```

```
[-3, 5.7, 8, 2.1, 0, -8]
```

Um den gewünschten Effekt von Addition und Skalarmultiplikation für Vektoren zu erreichen machen wir die Python-Listen zu NumPy-Arrays:

```
v = np.array([-3, 5.7, 8])
w = np.array([2.1, 0, -8])

v + w
```

```
array([-0.9,  5.7,  0. ])
```

Es gibt einige hilfreiche NumPy-Funktionen, um oft gebrauchte Typen von NumPy-Arrays zu erzeugen, z. B.:

```
# 11 evenly spaced numbers over a specified interval:  
x = np.linspace(0, 50, 11)  
print(x)
```

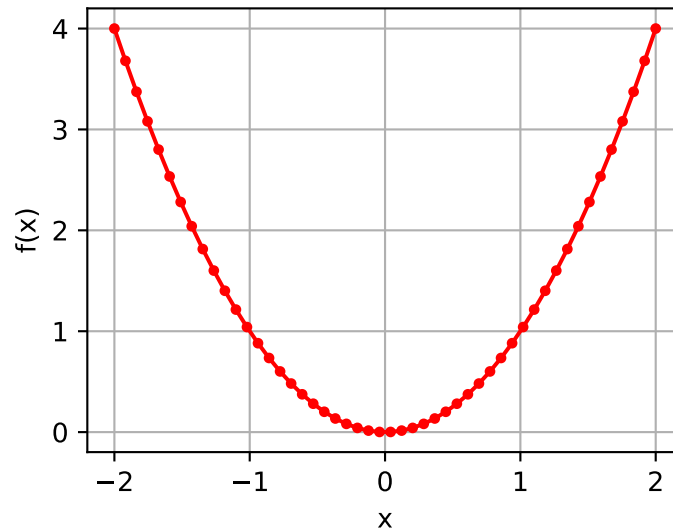
```
[ 0.  5. 10. 15. 20. 25. 30. 35. 40. 45. 50.]
```

```
# evenly spaced numbers over a specified interval with step size 2:  
x = np.arange(0, 20, 2)  
print(x)
```

```
[ 0  2  4  6  8 10 12 14 16 18]
```

7.3.6 Plot einer Funktion

```
import matplotlib.pyplot as plt  
  
# define the function f:  
def f(x):  
    return x**2  
  
# 50 grid points distributed between -2 and 2 with equal spacing:  
x = np.linspace(-2, 2, num=50)  
  
# plot the function at the grid points:  
plt.figure(figsize=(4, 3))  
plt.plot(x, f(x), linestyle='-', color='red', marker='.')  
plt.xlabel('x')  
plt.ylabel('f(x)')  
plt.grid(True)  
plt.show()
```



7.3.7 For-Schleife

Zinseszinsrechnung:

```
B_0 = 1000.0 # initial balance in EUR
q = 1.05     # interest rate factor
n = 5       # number of years

# range: start 1 is included, stop n + 1 is excluded!
for i in np.arange(1, n + 1, 1):
    B_i = B_0*q**i
    print(f"Balance after {i} years = {B_i:.2f} EUR.")
```

Balance after 1 years = 1050.00 EUR.

Balance after 2 years = 1102.50 EUR.

Balance after 3 years = 1157.63 EUR.

Balance after 4 years = 1215.51 EUR.

Balance after 5 years = 1276.28 EUR.

Rentenrechnung:

```
A = 2000.0 # yearly amount in EUR
q = 1.05   # interest rate factor
n = 5      # number of years

total = 0.0
for i in np.arange(0, n, 1):
    print(f"{i = }")
    total = total + A*q**(n - i)
```

```
print(f"Saved amount = {total:.2f} EUR.")
```

```
i = 0
i = 1
i = 2
i = 3
i = 4
Saved amount = 11603.83 EUR.
```

7.3.8 While-Schleife

Wir berechnen die [Fakultät](#) einer natürlichen Zahl $n > 0$:

```
n = 10
f = 1 # initial value for factorial n!
k = n # initial decreasing number k
while k > 0:
    print(f"{k} = ")
    f = f*k
    k = k - 1

print(f"{n}! = {f}")
```

```
k = 10
k = 9
k = 8
k = 7
k = 6
k = 5
k = 4
k = 3
k = 2
k = 1
10! = 3628800
```

7.3.9 If-Elif-Else Abfrage

Wir bestimmen das Vorzeichen von ein paar Zahlen:

```
numbers = np.arange(-3, 4, 1)
for n in numbers:
    if n > 0:
        print(f"{n} hat das Vorzeichen +.")
    elif n == 0:
        print(f"{n} hat kein Vorzeichen.")
    else:
        print(f"{n} hat das Vorzeichen -.")
```

-3 hat das Vorzeichen -.
-2 hat das Vorzeichen -.
-1 hat das Vorzeichen -.
0 hat kein Vorzeichen.
1 hat das Vorzeichen +.
2 hat das Vorzeichen +.
3 hat das Vorzeichen +.

Beachte: Eine If-Elif-Else Abfrage muss nicht zwingend `elif` oder `else` Teile haben.

Literaturverzeichnis

- [BC14] Richard Bronson und Gabriel Costa. *Schaum's Outline of Differential Equations (Schaum's Outlines)*. 4. Auflage. Mcgraw-Hill Education Ltd, 2014. ISBN: 0-07-182485-5.
- [BV18] Stephen Boyd und Lieven Vandenbergh. *Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares*. Englisch. 1. Aufl. Cambridge, UK ; New York, NY: Cambridge University Press, Juni 2018. ISBN: 978-1-316-51896-0. URL: <https://web.stanford.edu/~boyd/vmls/>.
- [Die14] Christopher Dietmaier. *Mathematik für angewandte Wissenschaften*. Deutsch. 2014. Aufl. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum, Juni 2014. ISBN: 978-3-8274-2420-4.
- [Far06] Stanley J. Farlow. *An Introduction to Differential Equations and Their Applications*. Englisch. Illustrated Edition. Mineola, N.Y: Dover, 2006. ISBN: 978-0-486-44595-3.
- [Fur95a] Peter Furlan. *Das gelbe Rechenbuch, Band 2*. Deutsch. Dortmund: Verlag Martina Furlan, Sep. 1995. ISBN: 978-3-931645-01-4.
- [Fur95b] Peter Furlan. *Das gelbe Rechenbuch, Band 3*. Deutsch. Dortmund: Verlag Martina Furlan, Sep. 1995. ISBN: 978-3-931645-02-1.
- [Fur95c] Peter Furlan. *Das gelbe Rechenbuch. Band 1*. Deutsch. Dortmund: Verlag Martina Furlan, Sep. 1995. ISBN: 978-3-931645-00-7.
- [Göl+17] Laurenz Göllmann u. a. *Mathematik für Ingenieure: Verstehen – Rechnen – Anwenden: Band 1: Vorkurs, Analysis in einer Variablen, Lineare Algebra, Statistik*. Deutsch. 1. Aufl. 2017 Edition. Berlin, Germany; Heidelberg: Springer Vieweg, Aug. 2017. ISBN: 978-3-662-53866-1.
- [Gol+18] Larry J. Goldstein u. a. *Calculus & Its Applications*. Englisch. 14, Global Edition. Pearson Education Limited, 2018. ISBN: 978-1-292-22904-1.
- [Kem19] Arnfried Kemnitz. *Mathematik zum Studienbeginn: Grundlagenwissen für alle technischen, mathematisch-naturwissenschaftlichen und wirtschaftswissenschaftlichen Studiengänge*. Deutsch. 12., erw. Aufl. 2019 Edition. Wiesbaden Heidelberg: Springer Spektrum, Nov. 2019. ISBN: 978-3-658-26603-5.
- [Kof21] Michael Kofler. *Python: Der Grundkurs*. Deutsch. 2. Aufl. Bonn: Rheinwerk Computing, Nov. 2021. ISBN: 978-3-8362-8513-1.
- [LL20] Svein Linge und Hans Petter Langtangen. *Programming for Computations - Python: A Gentle Introduction to Numerical Simulations with Python 3.6*. Englisch. 2. Aufl. Springer, 2020. ISBN: 978-3-030-16876-6.
- [MW85] Jerold Marsden und Alan Weinstein. *Calculus I (Undergraduate Texts in Mathematics)*. 2nd ed. 1985. Springer, 1985. ISBN: 0-387-90974-5. URL: <https://www.cds.caltech.edu/~marsden/volume/Calculus/>.
- [MW98a] Jerold Marsden und Alan Weinstein. *Calculus II (Undergraduate Texts in Mathematics)*. 2nd ed. 1985. Corr. 4th printing 1998. Springer, 1998. ISBN: 0-387-90975-3. URL: <https://www.cds.caltech.edu/~marsden/volume/Calculus/>.
- [MW98b] Jerold Marsden und Alan Weinstein. *Calculus III (Undergraduate Texts in Mathematics)*. 2nd ed. 1985. Corr. 4th printing 1998. Springer, 1998. ISBN: 0-387-90985-0. URL: <https://www.cds.caltech.edu/~marsden/volume/Calculus/>.

- [Pap09] Lothar Papula. *Mathematische Formelsammlung: Für Ingenieure Und Naturwissenschaftler*. 10. Aufl. 2009. Vieweg+Teubner Verlag, 2009. ISBN: 3-8348-0757-5.
- [Pap15] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2: Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium*. Deutsch. 14., überarb. u. erw. Aufl. Wiesbaden: Springer Vieweg, Apr. 2015. ISBN: 978-3-658-07789-1.
- [Pap18] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1: Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium*. Deutsch. 15., überarb. Aufl. Wiesbaden Heidelberg: Springer Vieweg, Aug. 2018. ISBN: 978-3-658-21745-7.
- [Pap19] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler - Anwendungsbeispiele: 222 Aufgabenstellungen mit ausführlichen Lösungen*. Deutsch. 8., überarb. Aufl. Wiesbaden Heidelberg: Springer Vieweg, 2019. ISBN: 978-3-658-24881-9.
- [Pap20] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler - Klausur- und Übungsaufgaben: 711 Aufgaben mit ausführlichen Lösungen zum Selbststudium und zur Prüfungsvorbereitung*. Deutsch. 6., erw. u. überarb. Aufl. 2020 Edition. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2020. ISBN: 978-3-658-30270-2.
- [SS13] Yvonne Stry und Rainer Schwenkert. *Mathematik kompakt: für Ingenieure und Informatiker*. Deutsch. 4., neu bearb. und erw. Aufl. Berlin Heidelberg: Springer, 2013. ISBN: 978-3-642-24326-4.
- [TT13] Gerald Teschl und Susanne Teschl. *Mathematik für Informatiker: Band 1: Diskrete Mathematik und Lineare Algebra*. Deutsch. 4., überarb. Aufl. 2013 Edition. Berlin: Springer Spektrum, Juli 2013. ISBN: 978-3-642-37971-0.
- [TT14] Gerald Teschl und Susanne Teschl. *Mathematik für Informatiker: Band 2: Analysis und Statistik*. Deutsch. 3., überarb. Aufl. 2014 Edition. Berlin Heidelberg: Springer Vieweg, 2014. ISBN: 978-3-642-54273-2.