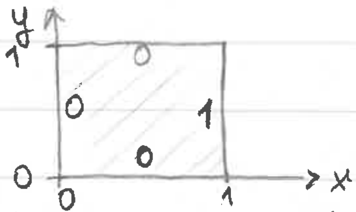
Aufgabe 6 $\quad \Delta u = 0$ für $u(x,y)$ im Gebiet $0 \le x, y \le 1$, d.h.

$u_{xx} + u_{yy} = 0.$

Randbedingungen:



Separationsansatz $u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$ in die PDGL einsetzen liefert:

$$X'' \cdot Y + X \cdot Y'' = 0$$

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = -\omega^2 \quad \text{negativ wegen Randbedingungen}$$

Allg. Lösungen: $X'' = \omega^2 X: \; X(x) = a \cosh(\omega x) + b \sinh(\omega x)$

$Y'' = -\omega^2 Y: \; Y(y) = c \cos(\omega y) + d \sin(\omega y)$

Aufgrund der Randbedingungen folgt $a = 0$, $c = 0$ und

$\sin(\omega 1) = 0$, d.h. $\omega = n\pi$ für $n = 1, 2, 3, \dots$

Zwischenergebnis: $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh(n\pi x) \cdot \sin(n\pi y).$

Bleibt die Randbegingung $u(1,y) = 1$:

$$u(1,y) = \sum_{n} c_n \sinh(n\pi) \cdot \sin(n\pi y) \stackrel{!}{=} 1 \quad \Big| \int_0^1 \dots \cdot \sin(m\pi y)\, dy$$

$$c_m \cdot \sinh(m\pi) \cdot \frac{1}{2} = \int_0^1 1 \cdot \sin(m\pi y)\, dy = \frac{-\cos(m\pi y)}{m\pi} \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{m\pi}\left[-\cos(m\pi) + 1\right] = \frac{1}{m\pi}\left[1 - (-1)^m\right]$$

$$c_m = \frac{2}{m\pi \sinh(m\pi)}\left[1 - (-1)^m\right]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4}{m\pi \sinh(m\pi)} & \text{für } m \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } m \text{ gerade} \end{cases}$$

Insgesamt:

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi \sinh((2k+1)\pi)} \sinh((2k+1)\pi x) \cdot \sin((2k+1)\pi y).$$