Typen von Randbedingungen für die Wärmeleitungsgleichung

Literatur: Farlow: PDE for Scientists and Engineers, Dover, 1993.
Lesson 3

Zsfg.: 3 Typen:

(1) $u(x_0,t) = g(t)$

Temp. bei x_0 ist spezifiziert durch vorgeg. Temp. $g(t)$.

(2) $\pm u_x(x_0,t) + \lambda u(x_0,t) = \lambda g(t)$..

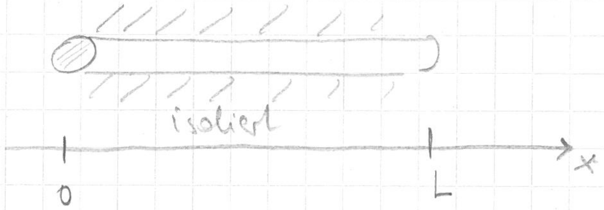
Wärmefl. nach außen ≙ Ableitung von u nach aussen (aus dem Medium hinaus)

(3) $\pm u_x(x_0,t) = f(t)$ ≙ Wärmefluss vorgeg.

z.B. isoliert: $f(t)=0$

▷ Typ (1)

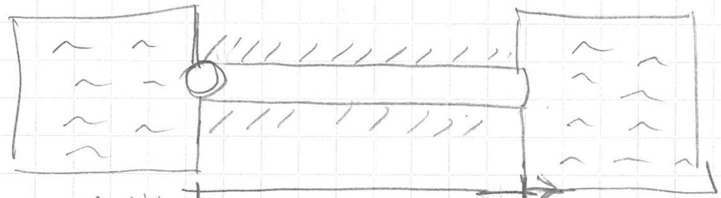
$u(x,t)$ .. Temp.



$u(0,t) = g_1(t)$ $\quad$ $u(L,t) = g_2(t)$

Über ein Thermostat und Regelung wird Temp. bei 0 und L auf g_1 bzw. g_2 gehalten.

▷ Typ (2)



Temp. $g_1(t)$ $\quad$ $x=0$ $\quad$ $x=L$ $\quad$ Temp. $g_2(t)$

(2) Newton's law of cooling:

Wärmefluss nach außen $\left[\frac{J}{m^2 s}\right]$ zum Zeitpkt t:

bei $x=0$: $= h\left[u(0,t) - g_1(t)\right]$

bei $x=L$: $= h\left[u(L,t) - g_2(t)\right]$

h ... Wärmetransferkoeffizient $\left[\frac{J}{m^2 s K}\right]$

ⓑ Fourier's law:

Wärmefluß nach außen $\left[\frac{J}{m^2 s}\right]$ zum Zpt.

bei $x=0$: $\quad K\, u_x(0,t)$

bei $x=L$: $\quad -K\, u_x(L,t)$

K … therm. Konduktivität $\left[\frac{J}{m\, s\, K}\right]$

ⓐ = ⓑ:

bei $x=0$: $\quad K\, u_x(0,t) = h\,[u(0,t) - g_1(t)]$

$$u_x(0,t) = \underbrace{\frac{h}{K}}_{=:\lambda\ \left[\frac{1}{m}\right]}[u(0,t) - g_1(t)] = \lambda\, \Delta \text{Temp.}$$

bei $x=L$: $\quad -K\, u_x(L,t) = h\,[u(L,t) - g_2(t)]$

$$-u_x(L,t) = \underbrace{\frac{h}{K}}_{=:\lambda}[\ \text{— " —}\ ]$$

Allg: $\boxed{\mp u_x(x_0,t) + \lambda\, u(x_0,t) = \lambda\, g(t)}$

▷ Typ ③ Spezifikation des Wärmeflusses bei x_0:

$$\pm K\, u_x(x_0,t) = \text{geg.}$$

z.B. Isolation, d.h. kein Wärmefluss

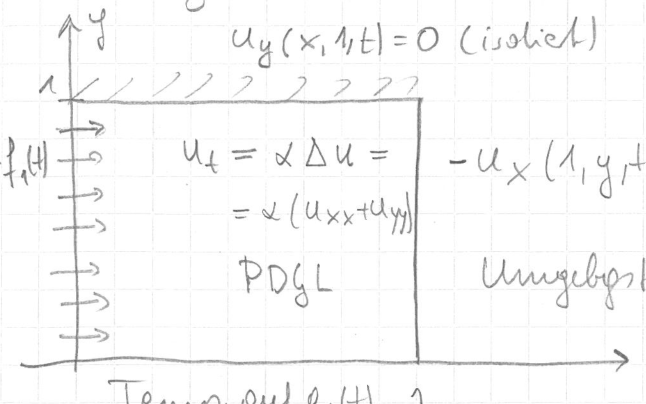
$$u_x(x_0,t) = 0$$

Bspe: 2-dim. Raumgebiet:

$u_y(x,1,t) = 0$ (isoliert)

$K \cdot u_x(0,y,t) = -f_1(t)$

$f_1(t)$ … vorgeg. Wärmefluss in das Gebiet



$-u_x(1,y,t) = \lambda(u(1,y,t) - 10)$

Umgebgstemp. auf 10°C

Temp. auf $g_1(t)$

$u(x,0,t) = g_1(t)$