...

lineare Transportglg.

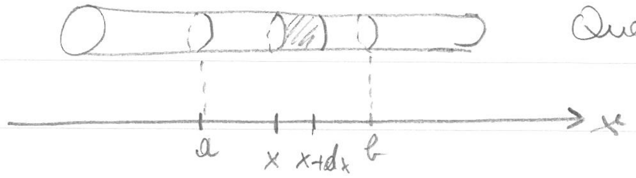
▶ **Ziel** Erhaltungssätze → Diffusionsgleichung → $\boxed{\text{Wärmeleitungsgl.}}$

Literatur: 1-dim: - Logan: p. 12–14, p. 29–31

n-dim: - Logan: p. 60–63

- Shearer Levy: p. 22–23

1-dim:



Querschnittsfläche A

▷ $u(x,t)$ ... Dichte $\left(\frac{\text{Größe}}{\text{Volumen}}\right)$ einer best. Größe (Masse, Energie, Tiere, Autos, ...) bei (x,t), z.B. $\frac{kg}{m^3}$

↳ $u(x,t)\,A\,dx$ ... Menge der Größe im Volumen $A\,dx$ bei (x,t), z.B. kg

▷ $\phi(x,t)$ ... Fluß der Größe bei (x,t) $\left(\frac{\text{Menge d. Größe durch Fläche}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}}\right)$, z.B. $\frac{kg}{m^2 s}$

↳ $\phi(x,t)A$ ... Menge der Größe durch A pro Zeit (Durchfluß): falls >0 : Fluß $\Longrightarrow_x$

<0 : Fluß $\Longleftarrow_x$

▷ $f(x,t)$ ... Quelle, Senke: $\frac{\text{Menge}}{\text{Vol.} \cdot \text{Zeit}}$ erzeugt / zerstört ($\oplus$ / $\ominus$)

↳ $f(x,t)\,A\,dx$ ... Menge erzeugt/zerstört in Vol. $A\,dx$ pro Zeit

Erhaltungssatz: Zusammenhang / Beziehg zw. u, ϕ, f

$$\underbrace{\frac{d}{dt}}_{\text{zeitl. Änderung der}} \underbrace{\int_a^b u(x,t)\,A\,dx}_{\text{Menge in Vol. zw. a und b}} = \underbrace{A\,\phi(a,t)}_{\text{Ein-Fluß bei a}} - \underbrace{\underbrace{A\,\phi(b,t)}_{\text{Aus-Fluß bei b}}}_{\text{Einfluß bei b}} + \underbrace{\int_a^b f(x,t)\,A\,dx}_{\text{Menge erzeugt}}$$

$\frac{d}{dt}$ ins Integral und $\phi(a,t) - \phi(b,t) = -\int_a^b \phi_x(x,t)\,dx$:

$$\int_a^b \left[u_t(x,t)A + \phi_x(x,t)A - f(x,t)A \right] dx = 0$$

$\rightarrow \forall a,b : \lim_{a \to b} \Rightarrow \quad u_t + \phi_x - f = 0$

und A herausheben

$$\boxed{u_t + \phi_x = f}$$ Fundamentaler Erhaltungssatz

Bspe: (a) Annahme: Fluß ist proportional der Dichte: $\phi = cu$. Und

$f = 0$: $\underline{u_t + c u_x = 0}$ ... lineare Transportgl.

Lsg: $\underline{u(x,t) = u_0(x-ct)}$ $u_0(x)$... Anfangsfkt.

(b) Diffusion: Annahmen: – Fluß von höheren zu niederen Dichten

– Fluß proportional zu örtl. Dichteänderung (= Dichtegradient)

d.h $\phi = -D u_x$

(Ficksches Gesetz)

D... Diffusionskonstante $\left[\frac{\text{Länge}^2}{\text{Zeit}}\right]$

$\Rightarrow$ Einsetzen in Erhaltungssatz: $\underline{u_t - D u_{xx} = f}$

$\underline{u_t - D u_{xx} = 0}$ (keine Quellen)

Diffusionsglg.

(c) 1-dim Wärmeleitungsglg. $u(x,t) = \rho \cdot c \cdot T(x,t)$

u: Energiedichte; ρ: Dichte $\frac{kg}{m^3}$; c: spez. Wärmekapazität J/(kg K)

vgl. $Q = m \cdot c \cdot \Delta T = mc(T - T_0)$

$= m \cdot c \cdot T$ für $T_0 = 0$

Annahme: keine Energiequellen od. -senken.

$$u_t + \phi_x = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \rho c T_t + \phi_x = 0$$

Wärmeleitfähigkeit oder thermische Konduktivität $\frac{W}{mK}$ (oft auch λ)

Annahme: Energiefluss $\boxed{\phi = -K T_x}$ (Fourier'sches Gesetz) ist proport. zum Temp.-gradient (örtl. Temp.änderung)

$$\phi = -D u_x = -D\rho c T_x$$
$$\phi = -K T_x$$
$$\Rightarrow K = D\rho c, \ \underline{k = D}$$

$$\Longrightarrow \quad \rho c T_t - K T_{xx} = 0$$

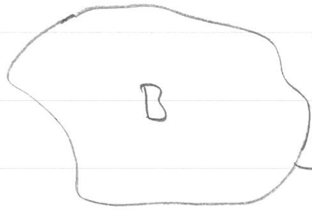
$$T_t - \underbrace{\frac{K}{\rho c}}_{=: k \text{ oder } \alpha} T_{xx} = 0$$

k oder α ... Temperaturleitfähigkeit $\left(\frac{m^2}{s}\right)$, thermal diffusivity

$$T_t - k T_{xx} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \boxed{T_t = k T_{xx}}$$

$$\text{bzw.} \quad \boxed{T_t = \alpha T_{xx}}$$

3-dim Version:



3-dim Bereich B, z.B. Kugel

Rand: ∂B

- ~~Wärme~~ Energiemenge in B: $\int_B c\rho T \, dV$ [J]

- ~~Wärme~~ energiemenge erzeugt in B pro Zeit: $\int_B f \, dV$ [W]

- Wärmemengenfluss aus B hinaus: $\int_{\partial B} \vec{\phi} \cdot \vec{n} \, dA = \int_{\partial B} \vec{\phi} \cdot d\vec{A}$ [W]

Vektorfeld $\left[\frac{W}{m^2}\right]$

Erhaltungssatz: $$\frac{d}{dt} \int_B c\rho T \, dV = - \underbrace{\int_{\partial B} \vec{\phi} \cdot d\vec{A}}_{= \int_B \operatorname{div}(\vec{\phi}) \, dV} + \int_B f \, dV$$

Gauß'scher Integralsatz

$$\Longrightarrow \int_B \left[c\rho T_t + \operatorname{div}(\vec{\phi}) - f \right] dV = 0 \quad \forall B$$

$$\boxed{c\varrho T_t + \operatorname{div}(\vec{\phi}) = f}$$

Annahme: $\underline{\vec{\phi} = -K \operatorname{grad}(T)}$ (Fouriersches Gesetz)

Rechg: $\operatorname{div}(\operatorname{grad}(T)) = \Delta T = T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}$

$$\Rightarrow \quad c\varrho T_t - K\Delta T = f \qquad |:c\varrho$$

$$T_t - \underbrace{\frac{K}{c\varrho}}_{k \text{ od. } \alpha} \Delta T = \underbrace{\frac{1}{c\varrho} f}_{\text{Null falls keine Quellen od. Senken}}$$

$$T_t - k\Delta T = 0$$

$$\boxed{T_t = k\Delta T}$$ Wärmeleitgsglg.

bzw. $$\boxed{T_t = \alpha \Delta T}$$

– · –

▷ Fundamentallösung der Wärmeleitungsglg. in 1 dim. (Integraldarstellg. der Lsg. Hitzekern (heat kernel))

Problem:

$u_t = \alpha u_{xx}$	....	PDGL	keine Randbedgn.!
$u(x,0) = u_0(x)$	...	Anfangstemperaturverteilung	
Finde $u(x,t)$	...	Temp. verteilung zum Zeitpkt $t>0$	

a) Fouriertransformation bzgl. x-Variable

$$\mathcal{F}\{u_t\} = \alpha\, \mathcal{F}\{u_{xx}\} \Rightarrow \frac{d}{dt} U(\xi,t) = -\alpha \xi^2 U(\xi,t)$$

gDGL in t $\forall \xi$

$$\mathcal{F}\{u(x,0)\} = \mathcal{F}\{u_0(x)\} \Longrightarrow U(\xi,0) = U_0(\xi)$$

(b) Lsg. im Fourierraum: $U(\xi,t) = U_0(\xi)\, e^{-\alpha\xi^2 t}$

(c) Inverse Fouriertransformation:

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\{U(\xi,t)\} = \mathcal{F}^{-1}\{U_0(\xi)\cdot e^{-\alpha\xi^2 t}\} =$$

Faltung, Tabelle

$$= u_0(x) * \left[\frac{1}{2\sqrt{\alpha\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4\alpha t}}\right] =$$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y) \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\alpha \pi t}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4\alpha t}}}_{\text{Fundamentallösung (Greensche Fkt., impulse-response)}} \, dy$$

→ geom. Interpretation: zerfließende Gaußglocke, Zeit $\hat{=}$ Varianz