Separation der Variablen

Beispiel aus dem Buch von MacCluer Seite 194 ff.: Eine homogene Stange der Länge 1, isoliert an der Längsseite, ist anfangs auf Temperatur 1. Die Enden werden abrupt auf Temperatur 0 gebracht.
Löse die PDGL $u_t(x,t) = u_{xx}(x,t)$ für die Temperatur $u(x,t)$ am Ort x und zur Zeit t mit der Anfangsbedingung $u(x,0) = 1$ für $0 < x < 1$ und den Randbedingungen $u(0,t) = u(1,t) = 0$ für $t \geq 0$. Wie entwickelt sich also das Temperaturprofil der Stange?
Lösungsstrategie: 1.) Wir finden spezielle Lösungen der PDGL, die nur die Randbedingungen erfüllen.
2.) Wir überlagern (summieren mit passenden Koeffizienten) diese spez. Lösungen, sodass die Anfangsbedingung erfüllt wird.
Die speziellen Lösungen werden von folgender Form angenommen:

$$u(x,t) = T(t)\,X(x)$$

D.h. die Variablen x und t separieren. Einsetzen in die PDGL $u_t = u_{xx}$ liefert $T'(t)\,X(x) = T(t)\,X''(x)$. Umformen liefert

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Da die linke Seite eine Funktion von nur t und die rechte Seite eine Funktion von nur x ist, müssen beide gleich einer Konstanten sein, die wir λ nennen:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda.$$

$\Rightarrow$ Die Funktion $T(t)$ erfüllt somit $T'(t) = \lambda\,T(t)$.
$\Rightarrow$ Die Funktion $X(x)$ erfüllt somit $X''(x) = \lambda\,X(x)$.
$T(t)$ hat die allg. Lösung $T(t) = C \cdot e^{\lambda t}$ für eine reelle Integrationskonstante C.

Falls $\lambda < 0$, dann hat $X(x)$ die allg. Lsg.

$$X(x) = a\cos(\sqrt{-\lambda}\,x) + b\sin(\sqrt{-\lambda}\,x).$$

Falls $\lambda > 0$, dann hat $X(x)$ die allg. Lsg.

$$X(x) = a\cosh(\sqrt{\lambda}\,x) + b\sinh(\sqrt{\lambda}\,x).$$

Falls $\lambda = 0$, dann hat $X(x)$ die allg. Lsg.

$$X(x) = a + bx$$

Aufgrund der Randbedingungen kommt nur der Fall $\lambda<0$ in Frage. Wir setzen $\lambda = -\omega^2$ und schreiben die allg. Lsg. somit als $X(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$.

Die Randbedingung $u(0,t)=0 \;\forall t\geq 0$ liefert für

$$u(x,t) = C e^{-\omega^2 t}[a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)]$$

$$u(0,t) = C e^{-\omega^2 t}[a\cdot 1 + b\cdot 0] \stackrel{!}{=} 0$$

Die Konstante C setzen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit auf 1, da sie in den anderen Konstanten a und b aufgeht. Daher folgt aus $u(0,t)=0$, dass $a=0$.

Die Randbedingung $u(1,t)=0 \;\forall t\geq 0$ liefert

$$e^{-\omega^2 t}\cdot b\cdot\sin(\omega\cdot 1) = 0.$$

b darf nicht Null sein, da ansonsten $u(x,t)=0$ wäre und die Anfangsbedingung nicht mehr konstruierbar wäre. Daher muss

$$\sin(\omega) = 0,$$

was bedeutet, dass $\omega = n\pi$ für $n = 1,2,3,\dots$. Negative n würden keinen neuen Beitrag leisten, da $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ gilt.

Unsere speziellen Lösungen lauten daher

$$u_n(x,t) = e^{-n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x),$$

und die allg. Lsg. der PDGL zu den gegebenen Randbedingungen schreiben wir als Linearkombination dieser spez. Lsgen:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x).$$

mit Koeffizienten $c_n\in\mathbb{R}$.

Die Linearkombination erfüllt wie die spez. Lsgen die PDGL, da diese linear ist, und sie erfüllt die Null-Randbedingungen. Bleibt, die Anfangsbedingung noch zu erfüllen. Das bewerkstelligen wir durch Anpassen der Koeffizienten c_n.

Für $t=0$ muss gelten, da $e^0=1$:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x) \overset{!}{=} 1 .$$

Intermezzo: $m,n \geq 1$

$$\int_0^1 \underbrace{\sin(m\pi x)\sin(n\pi x)}_{\text{Verwende } \sin(a)\sin(b)=\frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \cos((m-n)\pi x) - \cos((m+n)\pi x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((m-n)\pi x)}{(m-n)\pi} - \frac{\sin((m+n)\pi x)}{(m+n)\pi}\right]\Bigg|_0^1 = 0 \text{ für } m \neq n.$$

Für $m=n$: $\int_0^1 \underbrace{\sin^2(n\pi x)}_{\text{Verwende } \sin^2(a)=\frac{1}{2}[1-\cos(2a)]}\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 1-\cos(2n\pi x)\,dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi}\right]\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}[1-0-(0-0)] = \frac{1}{2}.$$

Insgesamt:

$$\int_0^1 \sin(m\pi x)\sin(n\pi x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ 1/2 & \text{für } m=n \end{cases}.$$

Wir multiplizieren die Bedingung $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x) = 1$ auf beiden Seiten mit $\sin(m\pi x)$ und integrieren jeweils von 0 bis 1:

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(m\pi x)\sin(n\pi x)\,dx = \int_0^1 \sin(m\pi x)\cdot 1\,dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \underbrace{\int_0^1 \sin(m\pi x)\sin(n\pi x)\,dx}_{0 \text{ bzw } 1/2} = \frac{-\cos(m\pi x)}{m\pi}\Bigg|_0^1$$

Die Summe $\sum_{n=1}^{\infty}$ hat daher nur einen nicht-Null Summanden bei $n=m$:

$$c_m \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{m\pi}\left[-\cos(m\pi) + \underbrace{\cos(0)}_{=1}\right]$$

$$c_m = \frac{2}{m\pi}\left[1-\cos(m\pi)\right] = \frac{2}{m\pi}\left[1-(-1)^m\right]$$

Die Koeffizienten c_n haben, da m jeden Wert von $1,2,3,\ldots$ annehmen kann, die Werte

$$c_n = \frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right] = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Ungerade Zahlen $n = 1,3,5,\ldots$ schreibt man gerne mit

$$n = 2k+1 \quad \text{für } k = 0,1,2,3,4,\ldots$$

Somit erhalten wir die Lösung unseres Problems:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi}\, e^{-(2k+1)^2\pi^2 t} \sin\big((2k+1)\pi x\big).$$