Laplacetransformation

▷ Idee: Löse GDGL durch folgenden "Umweg"

GDGL im Zeitbereich $\xrightarrow{\text{1. Transformation}}$ in Frequenzbereich:

2. algebraische Gleichung, die mit einfachen Umformungen lösbar ist

Lösung im Zeitbereich $\xleftarrow{\text{3. Rücktransformation mit Tabellen}}$

▷ Methode: Integraltransformation von Funktionen

allgemeine Integraltransformation von $f(t)$ zu $F(s)$ mit $s \in \mathbb{C}$:

$$F(s) := \int_\alpha^\beta K(s,t) \cdot f(t)\, dt$$

$K(s,t)$ ... Kern, engl. kernel

α, β ... Grenzen, die auch $+\infty$ oder $-\infty$ sein können

▷ Laplacetransformation

$$\boxed{F(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt}$$

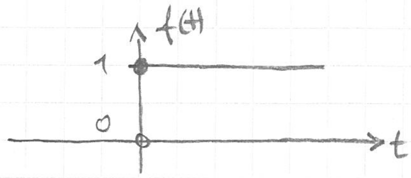
- Integral geht nur über $t = 0$ bis ∞ also über Zeiten jetzt und die Zukunft, keine Vergangenheit. Alternativ: Betrachte nur Funktionen $f(t)$, die Null sind für $t < 0$.
- Nomenklatur

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Signal im Zeitbereich — Laplacetransformierte im Frequenzbereich

▷ Beispiele:

- Stufenfunktion: Einschaltvorgang von Wert Null auf Eins.



$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, 1\, dt = -\left.\frac{e^{-st}}{s}\right|_{t=0}^{t=\infty} = 0 + \frac{1}{s} = \underline{\underline{\frac{1}{s}}}.$$

Annahme $\mathrm{Re}(s) > 0$

- Exponentialfunktion:

$f(t) = e^{-at}$ mit $a \in \mathbb{R}$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{-at}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s+a)t}\, dt = \left.\frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)}\right|_{t=0}^{t=\infty} =$$

Annahme: $\mathrm{Re}(s) + a > 0$

$$= 0 + \frac{1}{s+a} = \underline{\underline{\frac{1}{s+a}}}.$$

- Sinusfunktion

$f(t) = \sin(at)$ mit $a \in \mathbb{R}$

$$F(s) = \int_0^\infty \underbrace{e^{-st}}_{f} \cdot \underbrace{\sin(at)}_{g'}\, dt = \left.\underbrace{e^{-st}}_{f} \cdot \underbrace{\frac{-\cos(at)}{a}}_{g}\right|_0^\infty - \int_0^\infty \underbrace{-s e^{-st}}_{f'} \cdot \underbrace{\frac{-\cos(at)}{a}}_{g}\, dt$$

$$= 0 + \frac{1}{a} - \frac{s}{a} \int_0^\infty \underbrace{e^{-st}}_{f} \cdot \underbrace{\cos(at)}_{g'}\, dt =$$

Ann. $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$= \frac{1}{a} - \frac{s}{a}\left[\left.\underbrace{e^{-st}}_{f} \cdot \underbrace{\frac{\sin(at)}{a}}_{g}\right|_0^\infty - \int_0^\infty \underbrace{-s e^{-st}}_{f'} \cdot \underbrace{\frac{\sin(at)}{a}}_{g}\, dt \right] =$$

$$= \frac{1}{a} - \left(\frac{s}{a}\right)^2 \int_0^\infty e^{-st} \sin(at)\, dt.$$

$$\Rightarrow \quad F(s) = \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2} F(s)$$

$$F(s)\left[1 + \frac{s^2}{a^2}\right] = \frac{1}{a}$$

$$F(s) = \frac{1/a}{1 + s^2/a^2} = \underline{\underline{\frac{a}{a^2+s^2}}}.$$

▷ **Eigenschaften:**

Beispiel: $\boxed{\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = s \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)}$

Beweis:

$$\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = \int_0^\infty \underbrace{e^{-st} \cdot \dot{f}(t)}_{f \cdot g'} dt = \underbrace{e^{-st} f(t)}_{f \cdot g}\Big|_{t=0}^{\infty} - \int_0^\infty \underbrace{-se^{-st} f(t)}_{f' \cdot g} dt$$

Ann. Re(s)>0 ↗
$$= 0 - 1 \cdot f(0) + s \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

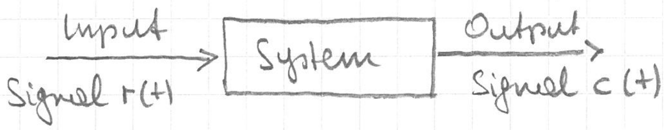
$$= -f(0) + s \cdot \mathcal{L}\{f(t)\}. \quad \square$$

mehr Eigenschaften und Laplacetransformationen in der Korrespondenztabelle, siehe ipynb und Web.

▷ **Übertragungsfunktion von GDGL:**

vgl. Nise 2.3. The Transfer Function

Ein Input-Outputsystem, das mit einer GDGL beschrieben wird, wird gerne in Form eines Blockdiagramms dargestellt



Zeitbereich: GDGL und Annahme, dass alle Anfangsbedg. Null

$$\underbrace{a_n \frac{d^n}{dt^n} c(t) + \dots + a_1 \frac{d}{dt} c(t) + a_0 c(t) = b_m \frac{d^m}{dt^m} r(t) + \dots + b_0 r(t)}$$

$$\downarrow \mathcal{L}$$

Frequenzbereich

$$a_n s^n C(s) + \dots + a_1 s C(s) + a_0 C(s) = b_m s^m R(s) + \dots + b_0 R(s)$$

$$(a_n s^n + \dots + a_0)\, C(s) = (b_m s^m + \dots + b_0)\, R(s)$$

$$\boxed{G(s) := \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0}}$$

↑
Übertragungsfunktion: enthält die vollständige Information des Systems

↓

Output $\boxed{C(s) = G(s) \cdot R(s)}$ ← Input