Partielle DGL (PDGL)

- Literatur → ipynb , mehr Publikationen als in allen anderen math. Gebieten gemeinsam
- Gesetze der Physik : $\boxed{\text{gDGL}}$ od. $\boxed{\text{PDGL}}$

Fkt(en) von 1 Variable

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}(t)$$

$\dot{x}, \ddot{x}, y', y''$ etc.

t ... Zeit

Fkt(en) von mehreren Variablen

Typ. Notation: $u(x,t)$

$u(x,y,z,t)$

part. Abl. u_x, u_{xx}, u_t, etc.

$x,(y,z), \; t$

Raum   Zeit

- Beispiele

▷ Lineare Transportgleichung: $u(x,t)$ .... Größe, die von Ort und Zeit abh., Dichte z.B.

$$\boxed{u_t + c u_x = 0}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

... 1. Ordg. (höchste part. Ableitung)

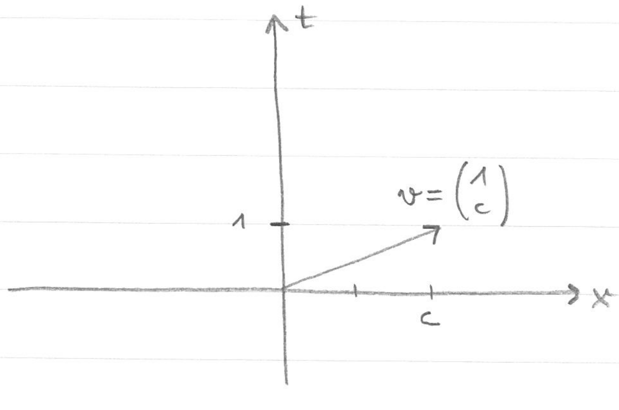
... linear (vgl. nicht-linear: $u \cdot u_x + u_t = 0$

linear: $u_{tt} = e^{-t} u_{xx} + \sin t$)

... homogen

... konstante Koeff. $c \in \mathbb{R}$

Bild:

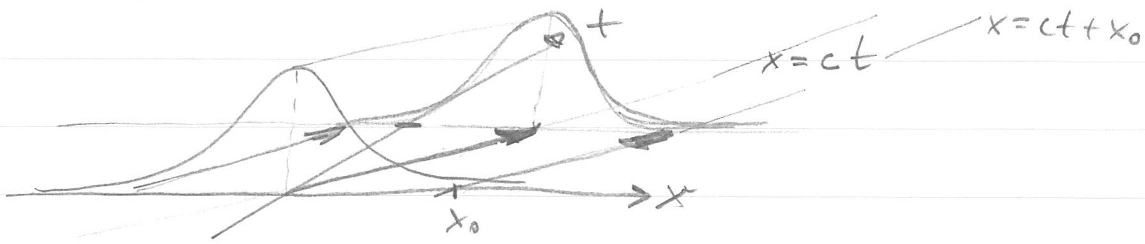


$u_t + c u_x$ = Richtungsableitung von u nach v: $\text{grad}(u) \cdot v = 0$ d.h. in Richtung v ändert sich u nicht.

$u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ... Skalarfeld

Anfangsbedingung: $u(x,0)$ ... zum Zeitpunkt 0 Vorgabe der u-Werte.

Bsp: $u(x,0) = e^{-x^2} = F(x)$



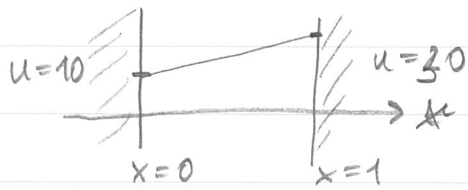
$u(x,t) = F(x-ct) = e^{-(x-ct)^2}$ nach rechts (in x-Richtg.) wandernde Welle.

Beweis:
$$u_x = F'(x-ct) \quad | \cdot c$$
$$u_t = F'(x-ct)\cdot(-c)$$
$$\overline{c u_x + u_t = c F'(x-ct) + F'(x-ct)\cdot(-c) = 0} \; ✓.$$

▷ Wärmeleitungsglg., Diffusionsglg (Herleitung später)
$$u_t = \alpha\, u_{xx}$$
$$u_t = \alpha(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$$
$$u_t = \alpha\, \Delta u$$

▷ Laplace-Glg. $\Delta u = 0$

1-dim: $u_{xx} = 0$ ... stat. Wärmeleitung: $u_t = 0$



Temperaturverlauf zw. Randbedg. $u(0,t) = 10$

$u_{xx} = 0$ keine räuml. Krümmung $\quad u(1,t) = 30$

$u(x,t) = 10 + 20\cdot x$ ... Gerade

▷ Poisson-Glg: $\Delta u = f$

$\Delta u(x,t) = f(x,t)$ ... Quellterm, inhomogen

▷ Maxwell-Glg.
$$\mathrm{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \mathrm{div}(\vec{B}) = 0$$
$$\mathrm{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \mathrm{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Elektrostatik: $\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi \quad , \vec{B} = 0$
$$\mathrm{div}(\vec{E}) = -\mathrm{div}(\mathrm{grad}(\phi)) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$-\Delta\phi = \rho/\varepsilon_0$$
$$\underline{\Delta\phi = -\rho/\varepsilon_0}\,. \quad \to \text{Poissonglg.}$$

▷ Navier-Stokes-Glg: Strömungstechnik, z.B. f. inkompressible Flüssigk.

$\vec{V}$ … Geschw., p … Druck, ρ … Dichte
$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\nabla p + (\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} = \frac{\mu}{\rho}\Delta\vec{V}$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\rho\vec{V} = 0$$

▷ Wellengleichung: Maxwell im ladungsfreien Raum ($\rho = 0, \vec{j} = 0$)
$$\mathrm{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad |\,\mathrm{rot}$$
$$\underbrace{\mathrm{rot}(\mathrm{rot}(\vec{E}))}_{= \mathrm{grad}(\underbrace{\mathrm{div}\vec{E}}_{=0}) - \Delta\vec{E}} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\underbrace{\mu_0\varepsilon_0}_{\frac{1}{c^2}}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$
$$\Rightarrow \quad -\Delta\vec{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} \quad : \quad \boxed{\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2\Delta\vec{E}}$$

je Komponente: $\boxed{u_{tt} = c^2\Delta u}$

▷ Schrödingerglg.
$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi}$$
vgl. Diffusionsglg.

$\psi(x,y,z,t) \in \mathbb{C}$, $\psi^*\psi$ … Wkt.-Verteilung von Ortsmessungen.

Übungsbspe:

(a) Überprüfen Sie, dass $u(x,t) = e^{-t} \cdot \sin x$ Lsg. der Wärmeleitungsgl. $u_t = u_{xx}$ ist:

(b) $u_t = k u_{xx}$ Wärmelglg. Überprüfen Sie, dass
(→ LV Angew. Math.)

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k t}}\, e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$ Lsg. ist. Skizzieren Sie $u(x,t)$.

(c) Überprüfen Sie, dass $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ die Laplace glg. $u_{xx} + u_{yy} = 0$ erfüllt.

(d) Für welche Werte von a und b ist die Fkt. $u(x,t) = e^{at}\sin(bx)$ eine Lsg. der WLglg $u_t = k u_{xx}$?

(e) Für welche Werte von A, k und ω ist die Welle $u(x,t) = A\cdot e^{i(kx-\omega t)}$ eine Lsg. der Wellenglg. $u_{tt} = c^2 u_{xx}$?

(d) $$\left.\begin{array}{l} u_t = a\cdot u \\ u_{xx} = -b^2 \cdot u \end{array}\right\rangle \quad a\cancel{u} = k(-b^2)\cancel{u}$$

$$\underline{a = -k\cdot b^2} \Rightarrow \underline{u = e^{-kb^2t}\sin(bx)}$$
$\forall b$

(e) $$\left.\begin{array}{l} u_{tt} = -\omega^2 u \\ u_{xx} = -k^2 u \end{array}\right\rangle \quad -\omega^2\cancel{u} = c^2(-k^2)\cancel{u}$$

$$\frac{\omega^2}{k^2} = c^2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\omega}{k} = \pm c$$

$$u(x,t) = A\, e^{i(kx \pm ckt)} \quad \leftarrow \omega = \pm c\cdot k$$

$$\underline{u(x,t) = A\, e^{ik(x\pm ct)}}$$

$$\frac{2\pi}{T} = \pm c \cdot \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \underline{\frac{\lambda}{T} = \pm c.}$$