Rechnen mit Differentialen

Beispiele:

▷

$$y = \sin(3x) \qquad f: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

$$dy = \underbrace{3\cos(3x)}_{} dx$$

$y'(x) = f'(x) = \frac{dy}{dx}$ ... Schreibweisen

1. Ableitung / Steigung bei x .... Bezeichnungen

Zahl, 1×1 Matrix ... Dimension

▷

$$z = y^2 \ln(x) \qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$$
$$(x,y) \mapsto z = f(x,y)$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$dz = \frac{y^2}{x} dx + 2y\ln(x)\, dy$$

$$dz = \underbrace{\left(\frac{y^2}{x} ,\ 2y\ln(x) \right)}_{} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$z'(x,y) = f'(x,y) = \text{grad}(f|(x,y))^T$

1. Ableitung, Gradient transponiert bei (x,y)

2 Zahlen, 1×2 Matrix

▷

$$x = \cos(\omega t) \qquad f: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$$
$$y = \sin(\omega t) \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(t)$$

$$dx = -\omega \sin(\omega t)\, dt$$

$$dy = \omega \cos(\omega t)\, dt$$

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\omega\sin(\omega t) \\ \omega\cos(\omega t) \end{pmatrix}}_{} dt$$

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = f'(t)$$

1. Ableitung, Geschwindigkeitsvektor, Tangentialvektor bei t

2 Zahlen, 2×1 Matrix

D $x = r\cos\varphi$ $\quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$y = r\sin\varphi$ $\quad \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(r,\varphi)$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial \varphi}d\varphi = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial \varphi}d\varphi = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi$$

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}}_{f'(r,\varphi)} \begin{pmatrix} dr \\ d\varphi \end{pmatrix}$$

1. Ableitung, Jacobimatrix bei (r,φ)

4 Zahlen, 2×2 Matrix

Kettenregel: $\quad x = r\cos\varphi \qquad r = \sqrt{t}$

$y = r\sin\varphi \qquad \varphi = \omega t$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longleftarrow \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \longleftarrow t$$

$$dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi = \cos\varphi \frac{1}{2\sqrt{t}}dt - r\sin\varphi\, \omega\, dt$$

$$dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi = \sin\varphi \frac{1}{2\sqrt{t}}dt + r\cos\varphi\, \omega\, dt$$

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}}_{\text{Jacobimatrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{t}} \\ \omega \end{pmatrix}}_{\text{Geschw.vektor in } r,\varphi \text{ bei } t}}_{\text{Matrixmultiplikation ergibt den Geschwindigkeitsvektor in } x,y \text{ bei } t} dt$$

Matrixmultiplikation ergibt

den Geschwindigkeitsvektor in x,y bei t

Variante: Um x nach t abzuleiten, müssen die Zwischenableitungen linear berücksichtigt werden:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial \varphi}d\varphi \quad \Big|:dt$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt}$$

Approximation, höhere Ableitungen, Taylorreihe

lin. Approximation einer Fkt. $z(x,y)$ bei (x_0,y_0):

$$dx = \Delta x = (x - x_0)$$

$$dy = \Delta y = (y - y_0)$$

$dz \neq \Delta z$ sondern $\Delta z = dz$ + Approx.fehler

$$\Delta z = z - z(x_0,y_0) \overset{\text{kurz}}{=} z - z_0$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\,dy \overset{\text{kurz}}{=} \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$\Delta z = dz + \text{Fehler}$$

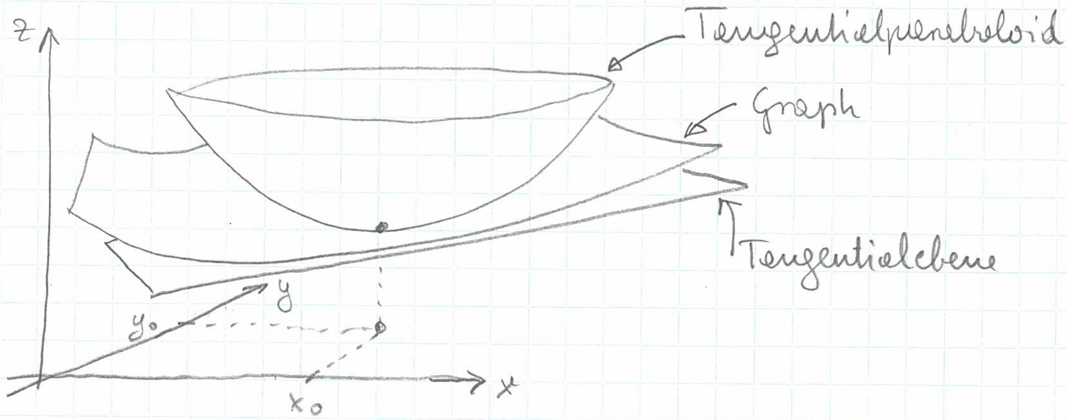
$$z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \text{Fehler}$$

$$\underbrace{z = z_0 + \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y}_{\text{Gleichung der Tangentialebene bei } (x_0,y_0,z_0) \text{ an den Graphen von } z(x,y)\text{: Taylorreihe von } z \text{ bis 1. Ordg. bei } (x_0,y_0)} + \text{Fehler} = z_0 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} + \text{Fehler}$$

quadratische Approximation von $z(x,y)$ bei (x_0,y_0)

$$\underbrace{z = z_0 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} + \frac{1}{2}(\Delta x, \Delta y)\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}}_{\text{Gleichung des Tangentialparaboloids bei } (x_0,y_0) \text{ an den Graphen von } z(x,y)\text{: Taylorreihe von } z \text{ bis 2. Ordg. bei } (x_0,y_0)} + \text{Fehler}$$

Bild:



Beispiel $z(x,y) = 3x^2y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6y \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y \partial x} = 6x \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x$$

Sind nicht zufällig gleich denn es gilt allgemein, dass

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Die beiden ersten partiellen Ableitungen bilden den Gradienten

$$\operatorname{grad}(z)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6xy \\ 3x^2 \end{pmatrix}$$

Die vier zweiten part. Ableitungen bilden die Hessematrix

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6y & 6x \\ 6x & 0 \end{pmatrix}$$

Bei $(x_0, y_0) = (3,4)$:

Gradient: $\operatorname{grad}(z) = \begin{pmatrix} 6 \cdot 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 \\ 27 \end{pmatrix}$

Hessematrix $H = \begin{pmatrix} 6 \cdot 4 & 6 \cdot 3 \\ 6 \cdot 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 18 \\ 18 & 0 \end{pmatrix}$

Offset: $z_0 = 3 \cdot 3^2 \cdot 4 = 108$

Taylorreihe bei (3,4) bis 2. Ordg.:

$$z \cong 108 + (72, 27)\begin{pmatrix} x-3 \\ y-4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-3, y-4)\begin{pmatrix} 24 & 18 \\ 18 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-4 \end{pmatrix}$$

$=$ .... ausrechnen $=$ quadr. Fkt. in x und y, die $z(x,y)$ bei (3,4) approximiert.