Vektorräume

Notation:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Komponenten,} \\ \leftarrow \text{Koordinaten, ...} \\ \vdots \quad \text{des Vektors} \\ \\ \end{array}$$

Name des Vektors $\nearrow$

Spaltenvektor mit n Komponenten: n-Vektor

Definitionen

Ein n-Vektor ist eine geordnete Liste von n reellen Zahlen.

Die Menge aller n-Vektoren heißt der Vektorraum $\mathbb{R}^n$.

Die Zahl n ist die Dimension von $\mathbb{R}^n$.

$x^T = (x_1, \dots, x_n)$ ist der transponierte Vektor, ein Zeilenvektor.

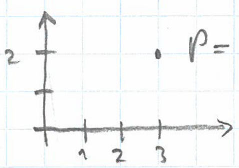
Die Operation des Transponierens macht Spalten- zu Zeilenvektoren und umgekehrt: $(x^T)^T = x$

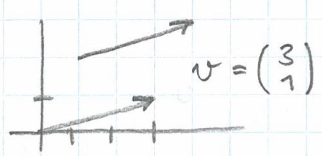
Achtung! Eine Liste von z.B. 300 10er Vektoren wird typischerweise mit $x_1, \dots, x_{300}$ bezeichnet, wobei $x_k \in \mathbb{R}^{10}$, d.h.

$$x_k = \begin{pmatrix} x_{k,1} \\ x_{k,2} \\ \vdots \\ x_{k,10} \end{pmatrix}$$

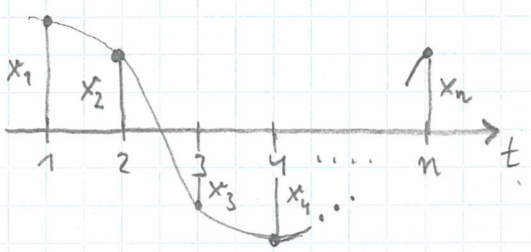
Anwendung und graphische Darstellung

▷ Punkte und Pfeile in der Ebene $\mathbb{R}^2$ und im Raum $\mathbb{R}^3$





▷ Signale, Zeitreihen



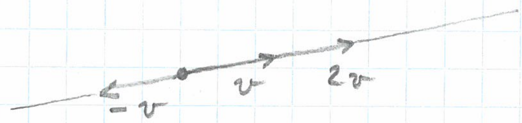
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

▷ Listen   Preise, Aufteilungen, Einkaufskörbe, ...

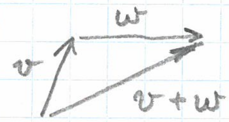
Rechenoperationen

▷ Skalarmultiplikation: $3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -21 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$

elementweise



▷ Addition: elementweise $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$



Ein Ausdruck der Form $\alpha \cdot v + \beta \cdot w$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $v, w \in \mathbb{R}^n$ heißt Linearkombination der Vektoren v und w.

Allgemeiner $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot v_i$ mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$ und $v_i \in \mathbb{R}^n$.

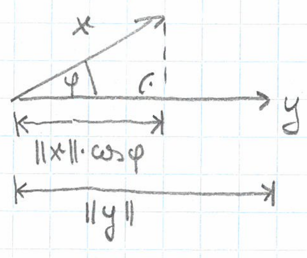
▷ Inneres Produkt von zwei Vektoren $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ ist die Zahl

$$x^T y = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k .$$

↑ Matrixmultiplikation

$x^T y = y^T x$

geometrische Interpretation (vgl. Pythagoras)



$$x^T y = \|x\| \cdot \cos\varphi \cdot \|y\|$$
$$= \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\varphi$$

→ Winkel zw. x und y: $\cos\varphi = \frac{x^T y}{\|x\| \cdot \|y\|}$

→ Länge von x: $x^T x = \|x\|^2$

$$\|x\| = \sqrt{x^T x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

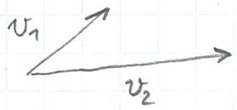
Lineare (Un-) Abhängigkeit

k Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_k$ aus $\mathbb{R}^n$ heißen <u>linear unabhängig</u>, wenn die Linearkombination

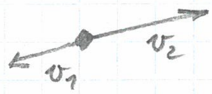
$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0$$

nur die triviale Lösung $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_k = 0$ hat.
Andernfalls heißen die k Vektoren <u>linear abhängig</u>.

<u>Beispiele</u> $\mathbb{R}^2$:



lin. unabh.



lin. abh.

$\mathbb{R}^3$: Die drei <u>Standardbasisvektoren</u>

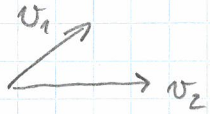
$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ sind lin. unabh.}$$

Wenn Vektoren lin. abh. sind, lässt sich mind. ein Vektor als Linearkombination der anderen darstellen.

Die <u>lineare Hülle</u> (engl. span) von k Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ ist die Menge aller Linearkombinationen $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$.

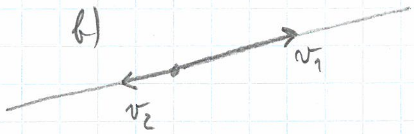
Notation: $\operatorname{span}(v_1, v_2, \dots, v_k)$

Beispiele: a)



$\operatorname{span}(v_1, v_2) = \mathbb{R}^2$

b)



$\operatorname{span}(v_1, v_2) = \text{Gerade} = \operatorname{span}(v_1) = \operatorname{span}(v_2)$

c) Die drei Standardbasisvektoren e_1, e_2, e_3 spannen den ganzen $\mathbb{R}^3$ auf und sind linear unabhängig. Deshalb lässt sich jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ eindeutig als Linearkombination $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ schreiben.

Ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ ist eine Menge von Vektoren in $\mathbb{R}^n$, sodaß jede Linearkombination von Vektoren der Menge wieder in der Menge ist.

Die Dimension eines (Unter)Vektorraums ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren.

Beispiele:	Gerade in $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots$ hat Dimension	1
	Ebene in …	2
	$\mathbb{R}^2$	2
	$\mathbb{R}^3$	3
	{Nullvektor}	0