Arbeitsintegrale

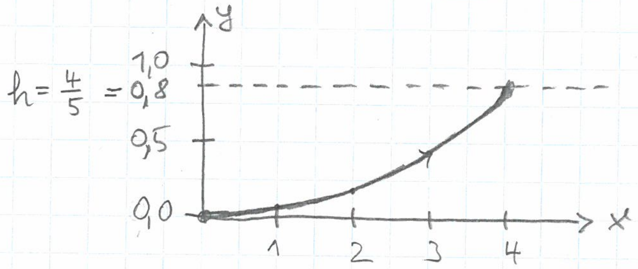
Beispiel: Arbeit gegen das Gravitationsfeld bei einer krummlinigen Bewegung in der x-y-Ebene.

- Bewegungskurve:

(a) nach der Zeit parametrisiert:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= 4\sqrt{t} \\ y(t) &= \frac{4}{5}t \end{aligned}\right\} \text{ erfüllt } y = \frac{1}{20}x^2$$

t zwischen 0 und 1

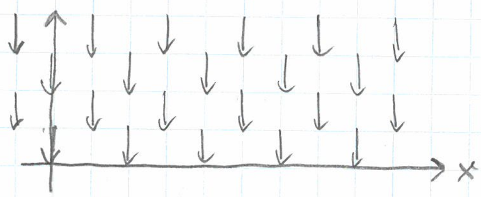


(b) nach x-Achse parametrisiert: x zwischen 0 und 4

$$y = \frac{1}{20}x^2$$

- Kraftfeld der Gravitation:

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$



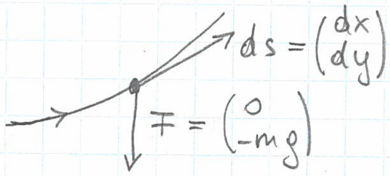
Arbeit gegen das Gravitationskraftfeld entlang des Weges:

$$W = -\int F \cdot ds$$

↑ inneres Produkt

ds … vektorielles Wegstück

F … Kraft



(a)
$$dx = 4\frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \frac{2}{\sqrt{t}}dt$$

$$dy = \frac{4}{5}dt$$

$$F \cdot ds = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{t}} \\ 4/5 \end{pmatrix} dt = -\frac{4}{5}mg\,dt$$

$$W = -\int F\cdot ds = \int_0^1 mg\,\tfrac{4}{5}\,dt = mg\,\tfrac{4}{5}\int_0^1 dt = mg\,\tfrac{4}{5}\,t\Big|_0^1 =$$

$$= mg\,\tfrac{4}{5} = \underline{mgh}.$$

(b) dx

$$dy = \tfrac{1}{10}\,x\,dx$$

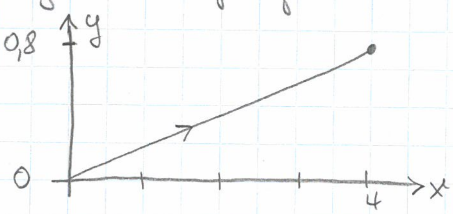
$$F\cdot ds = \begin{pmatrix}0\\-mg\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}dx\\ \frac{x}{10}dx\end{pmatrix} = -mg\,\tfrac{x}{10}\,dx$$

$$W = -\int F\cdot ds = \int_0^4 mg\,\tfrac{x}{10}\,dx = mg\,\tfrac{1}{10}\,\tfrac{x^2}{2}\Big|_0^4 =$$

$$= mg\,\frac{16}{10\cdot 2} = mg\,\frac{4}{5} = \underline{mgh}.$$

▷ Beachte, dass die Arbeit <u>nicht von der Parametrisierung</u> (a) bzw. (b) <u>abhängt</u>. <u>Dies gilt immer.</u> Man kann daher jene Parametrisierung wählen, die am angenehmsten ist.

▷ Anderer Weg zw. Anfangsort $(0,0)$ und Endort $(4, \frac{4}{5})$:



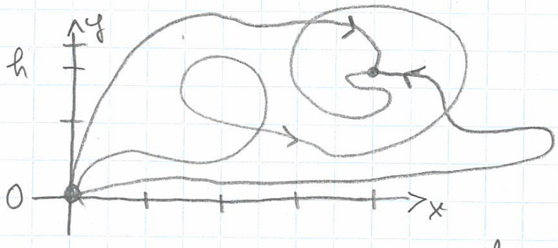
x zw. 0 und 4 $\rightarrow dx$

$y = 0{,}2\,x$ $\rightarrow dy = 0{,}2\,dx$

$$W = -\int F\cdot ds = -\int \begin{pmatrix}0\\-mg\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}dx\\0{,}2\,dx\end{pmatrix} = \int_0^4 mg\,0{,}2\,dx = mg\,0{,}2\,x\Big|_0^4 =$$

$$= mg\,0{,}8 = mgh.$$

Die Arbeit ist <u>unabhängig vom gewählten Weg</u> zw. Anfangs- und Endort. <u>Dies gilt nicht immer</u>, Gegenbeispiel folgt.



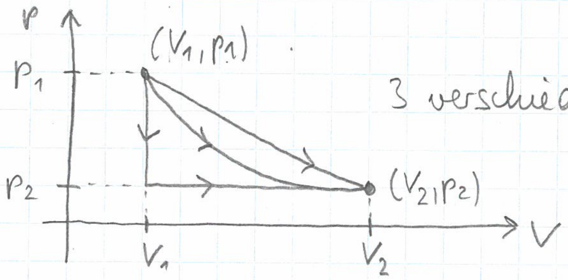
immer dieselbe Arbeit

$$W = -\int \begin{pmatrix}0\\-mg\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}dx\\dy\end{pmatrix} = \int_0^h mg\,dy = mg\,y\Big|_0^h = \underline{mgh}.$$

Beispiel: Arbeit, die von einem Gas verrichtet wird:

$$W = \int p\,dV$$

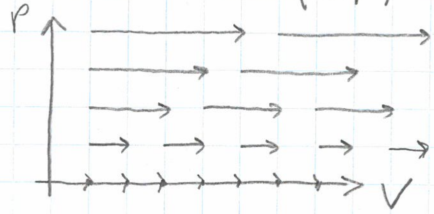
Zustand des Gases wird durch die Koordinaten V und p angegeben. (Vgl. vorher: Ort wird durch die Koord. x und y angegeben. Bewegung in x-y Ebene) Prozess in der p-V-Ebene:



3 verschiedene Wege vom Anfangszustand (V_1, p_1) in den Endzustand (V_2, p_2).

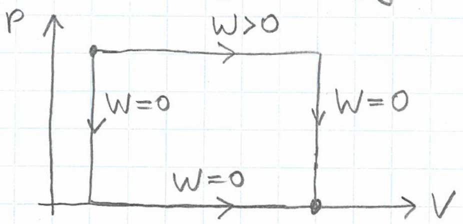
Frage: Welches Vektorfeld ist im p-V-Diagramm zu zeichnen, so dass $W = \int F \cdot ds$?

Antwort: $ds = \begin{pmatrix} dV \\ dp \end{pmatrix} \Rightarrow F = \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$



Frage: Ist die Arbeit wegabhängig oder wegunabhängig?

Antwort: wegabhängig. Bsp.:



▷ Charakterisierung von wegunabhängigen Arbeitsintegralen durch Potentialfunktionen:

Gravitation: $\underline{W} = \int mg\,dy = \int d(\underbrace{mgy}_{=:U(x,y)}) = \int dU = U\Big|_{\text{Anfg.}}^{\text{Ende}} =$

$$= mgy\Big|_{\text{Anfg.}}^{\text{Ende}} = mgh - mg\cdot 0 = mgh = \underline{\Delta U}$$

Arbeit = Potenialdifferenz.

▷ Zu $p\,dV$ gibt es keine Potentialfunktion:

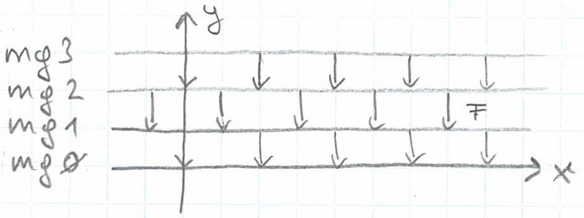
Angenommen $p\,dV$ wäre gleich $d\phi$, dann müsste gelten, daß

$$0 \cdot dp + p\,dV = d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial V}\,dV + \frac{\partial \phi}{\partial p}\,dp$$

Aus $\frac{\partial \phi}{\partial p} = 0$ würde folgen, daß ϕ nicht von p abhängt, also eine Funktion von V alleine wäre: $\phi(V)$. Dann wäre aber auch $\frac{\partial \phi}{\partial V}$ eine Fkt. von V alleine und somit sicher nicht gleich p.

Auf Grund dieses Widerspruchs kann $p\,dV$ nicht $d\phi$ sein.

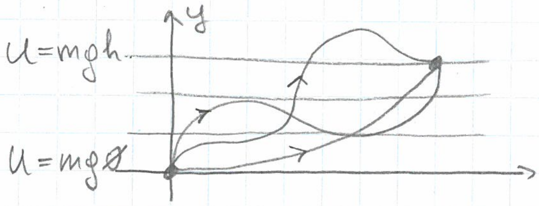
▷ Bild zum Gravitationspotential $U(x,y) = mgy$



$$dU = 0 \cdot dx + mg\,dy$$
$$= -F \cdot ds \text{ mit}$$
$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

$$W = \int -F \cdot ds = \int dU = \Delta U .$$

Achtung: zusätzliches Minuszeichen!



$$\Delta U = mgh - mg\varnothing = mgh$$

Beispiel: 1-atomiges Gas von 1 Mol, ideale Gasglg. $pV = nRT \overset{n=1}{=} RT$

▷ Zustandsraum in p-V-Koordinaten: p-V-Diagramm

▷ Zustandsfunktionen ≡ Zustandsgrößen:

- Temperatur: $T(V,p) = \frac{pV}{R}$ mit R ... allg. Gaskonstante
- innere Energie: $U(V,p) = \frac{3}{2} pV = \frac{3}{2} RT$
- Entropie: $S(V,p) = \frac{3}{2} R \ln(pV^{5/3})$

▷ Wärmemenge, die vom Gas bei einem Prozess absorbiert wird:

$Q = \int T\,dS$ ... ist keine Zustandsgröße, weil weg/prozessabhängig. Prozessgröße.

$T\,dS = ?$

$$dS = \frac{\partial S}{\partial V} dV + \frac{\partial S}{\partial p} dp =$$

$$= \frac{3}{2} R \frac{p \frac{5}{3} V^{2/3}}{pV^{5/3}} dV + \frac{3}{2} R \frac{V^{5/3}}{pV^{5/3}} dp =$$

$$= \frac{5}{2} R \frac{1}{V} dV + \frac{3}{2} R \frac{1}{p} dp$$

$$T\,dS = \frac{pV}{R} dS = \frac{5}{2} p\,dV + \frac{3}{2} V\,dp.$$

Warum ist $T\,dS \neq d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial V} dV + \frac{\partial \phi}{\partial p} dp$? Angenommen es wäre so, dann würde gelten, dass

$$\frac{\partial \phi}{\partial V} = \frac{5}{2} p \quad \text{und} \quad \frac{\partial \phi}{\partial p} = \frac{3}{2} V$$

$$\Big\downarrow \frac{\partial}{\partial p} \qquad\qquad \Big\downarrow \frac{\partial}{\partial V}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial p \partial V} = \frac{5}{2} \qquad\qquad \frac{\partial^2 \phi}{\partial V \partial p} = \frac{3}{2}$$

Die gemischten partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 \phi}{\partial p \partial V}$ und $\frac{\partial^2 \phi}{\partial V \partial p}$ müssten aber gleich sein. → Widerspruch und somit $T\,dS \neq d\phi$ ...

Wärme ist also keine Zustandsgröße und die Frage „Wieviel Wärme hat das Gas?" ist daher nicht sinnvoll.

▷ Arbeit, die vom Gas bei einem Prozess geleistet wird:

$W = \int p\,dV$ ... ist keine Zustandsgröße, weil weg/prozess-abhängig. Prozessgröße. $p\,dV \neq d\phi$

Schreibweise für Prozessgrößen:

$$\left.\begin{aligned} T\,dS &= \delta Q \\ p\,dV &= \delta W \end{aligned}\right\} \text{ unexakte Differentiale}$$

Differentiale von Zustandsgrößen sind vollständige/totale Differentiale und heißen auch exakte Differentiale. Bsp.: dU

Die Differenz von δQ und δW ist allerdings exakt:

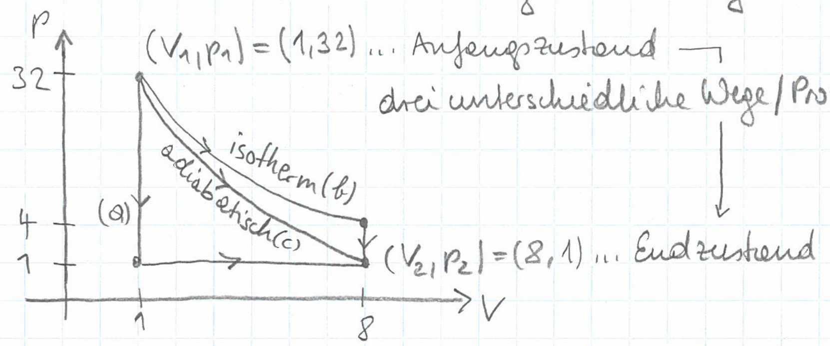
$$\delta Q - \delta W = \tfrac{5}{2} p\,dV + \tfrac{3}{2} V\,dp - p\,dV =$$
$$= \tfrac{3}{2} p\,dV + \tfrac{3}{2} V\,dp =$$
$$= \tfrac{3}{2} d(pV) = d\left(\tfrac{3}{2} pV\right) = dU$$

$\boxed{\delta Q - \delta W = dU}$ und somit $\int \delta Q - \int \delta W = \int dU$

$$Q - W = \Delta U.$$

Energieerhaltung

Rechenbeispiel:



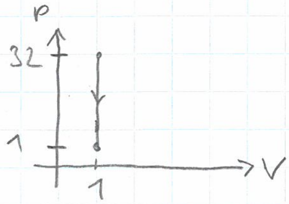
○ Änderung der inneren Energie:

$$\Delta U = U(V_2, p_2) - U(V_1, p_1) = \tfrac{3}{2} p_2 V_2 - \tfrac{3}{2} p_1 V_1 =$$
$$= \tfrac{3}{2}\, 1 \cdot 8 - \tfrac{3}{2}\, 32 \cdot 1 = \underline{-36}$$

... Das Gas verliert bei der Expansion Energie im Ausmaß von 36 Einheiten.

Teil 1:

Prozess (a):



$dV = 0$, da V konstant 1

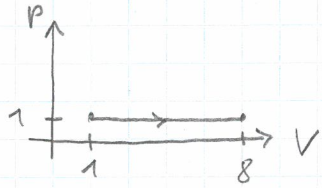
$dp \neq 0$, da p von 32 zu 1.

$$Q_1 = \int \delta Q = \int \frac{5}{2} p \underbrace{dV}_{=0} + \frac{3}{2} \underbrace{V}_{=1} dp = \frac{3}{2}\int dp = \frac{3}{2}\Delta p = \frac{3}{2}(1-32) =$$

$$= -\frac{3}{2}\,31$$

$$W_1 = \int \delta W = \int p \underbrace{dV}_{=0} = 0$$

Teil 2:



$dV \neq 0$, da V von 1 zu 8

$dp = 0$, da p konstant 1

$$Q_2 = \int \delta Q = \int \frac{5}{2} \underbrace{p}_{=1} dV + \frac{3}{2} V \underbrace{dp}_{=0} = \frac{5}{2}\int dV = \frac{5}{2}\Delta V = \frac{5}{2}(8-1) =$$

$$= \frac{5}{2}\,7$$

$$W_2 = \int \delta W = \int \underbrace{p}_{=1} dV = \int dV = \Delta V = 8-1 = 7$$

Insgesamt: $Q_1 + Q_2 - W_1 - W_2 =$

$$-\frac{3}{2}31 + \frac{5}{2}7 - 0 - 7 = -29 - 7 = -36 = \underline{\Delta U} \checkmark$$

Prozess (c): adiabatisch, d.h. die Entropie bleibt konstant: $dS = 0$

$$S(V,p) = \frac{3}{2} R \ln\left(p V^{5/3}\right) = \text{konst.}$$

$$p V^{5/3} = \text{konst.}$$

Zustand 1: $p_1 V_1^{5/3} = 32 \cdot 1^{5/3} = 32$

Zustand 2: $p_2 V_2^{5/3} = 1 \cdot 8^{5/3} = 32$

Während dem ganzen Prozess gilt somit $pV^{5/3} = 32$

Parametrisierung nach V: $p = \frac{32}{V^{5/3}}$

$$dp = 32 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) V^{-8/3} dV$$

$$= -\frac{5}{3}\,32\,\frac{1}{V^{8/3}}\,dV$$

$$Q = \int \delta Q = \int T \underbrace{dS}_{=0} = 0$$

$$W = \int \delta W = \int p\,dV = \int \frac{32}{V^{5/3}} dV = 32 \left.\frac{V^{-2/3}}{-2/3}\right|_1^8 =$$

$$= -3\cdot 16 \left.\frac{1}{V^{2/3}}\right|_1^8 = -3\cdot 16\left(\frac{1}{4} - 1\right) = -3\cdot 16 \cdot \left(-3/4\right) = 36.$$

$$Q - W = 0 - 36 = \underline{\Delta U}. \checkmark$$

Allgemeines <u>Kriterium</u> zur Überprüfung, ob ein Vektorfeld oder ein Differential weg(un)abhängig bzw. (un)exakt ist.

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw} \quad F_1\, dx_1 + F_1\, dx_2 \quad \text{und}$$

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad F_1\, dx_1 + F_2\, dx_2 + F_3\, dx_3 \quad \text{sind}$$

<u>wegunabhängig / exakt</u>, wenn <u>$\mathrm{rot}(F) = 0$</u>

und

<u>wegabhängig / inexakt</u>, wenn <u>$\mathrm{rot}(F) \neq 0$.</u>

Wegunabhängige Kraftvektorfelder heißen auch <u>konservativ</u>.

Wenn $\mathrm{rot}(F) = 0$ gibt es somit eine <u>Potentialfunktion</u> ϕ mit

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} dx_2 + \ldots = \pm\left(F_1\, dx_1 + F_2\, dx_2 + \ldots\right)$$

bzw. $\mathrm{grad}(\phi) = \pm F$

<u>Vorzeichenkonvention:</u>

−: Mechanik / Elektrodynamik

+: Thermodynamik