Lineare Funktionen

Beispiel: lineare Kostenfunktion:

Warenkorbvektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{10} \end{pmatrix}$ für 10 Artikel, Preisvektor $c = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ \vdots \\ 112 \end{pmatrix}$ für Stückpreise

Kostenfunktion: Kosten des Warenkorbs

$$f(x) = 5x_1 + 13x_2 + \dots + 112x_{10}$$
$$= (5, 13, \dots, 112)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{10} \end{pmatrix} = c^T x$$

Definition: Eine lineare Funktion von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ ist gegeben durch das innere Produkt eines fixen Vektors mit einem Variablen Vektor.

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = c^T x$$

Eigenschaften:

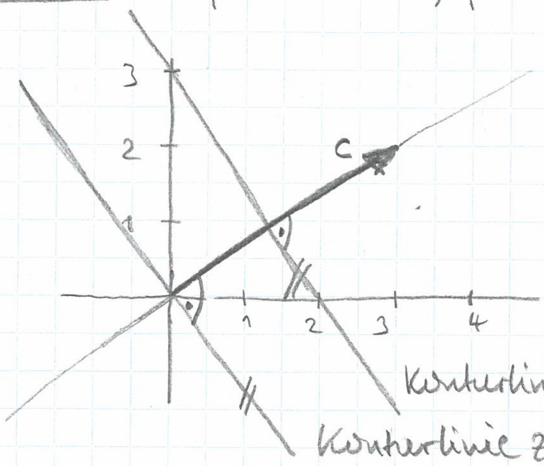
(a) Jede lin. Fkt. $f(x) = c^T x$ erfüllt die Linearitätseigenschaft

$$\boxed{f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

Der Funktionswert der Linearkombination ist gleich der Linearkombination der Funktionswerte.

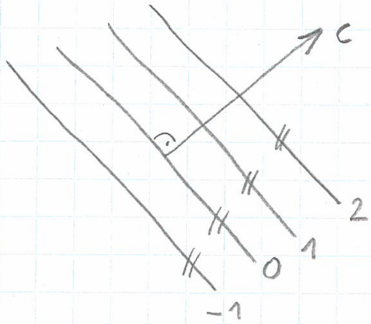
(b) Jede Fkt., die die Linearitätseigenschaft erfüllt, ist von der Form $f(x) = c^T x$.

Geometrie: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x_1 + 2x_2 \Rightarrow c = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$



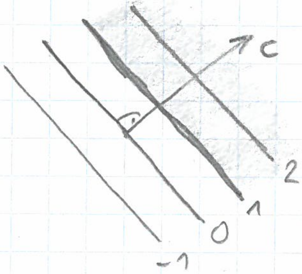
Der Koeffizientenvektor c ist orthogonal zu den parallelen Konturlinien!

besseres Bild:

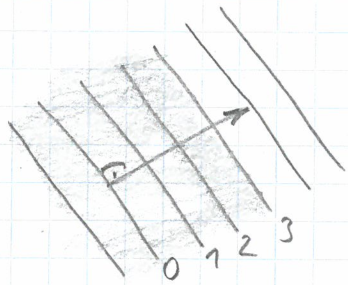


Die Konturlinie $f(x) = c^T x = 1$ ist eine Gerade mit c einem Normalvektor.

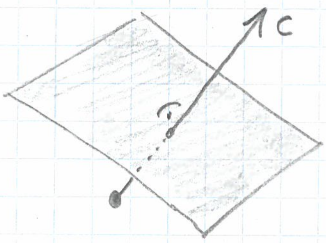
Ungleichung $c^T x \geq 1$ definiert eine Halbebene.



$c^T x \leq 3$



$\mathbb{R}^3$:



Ebene $c^T x \overset{z.B.}{=} 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 10$

$\mathbb{R}^n$: $c^T x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n = b$

ist eine <u>Hyperebene</u>.