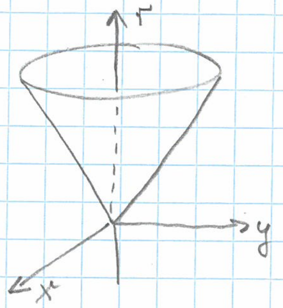
Vektoranalysis   div, grad, rot

▷ Ein Skalarfeld auf $\mathbb{R}^n$ ist eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

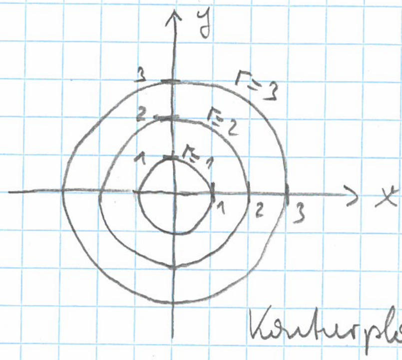
Bsp. und Bilder:

$$T(p,V) = \frac{pV}{nR} \quad \text{ist eine Fkt. } T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (p,V) \mapsto T(p,V)$$

$$r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad r: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto r(x,y)$$



Graph

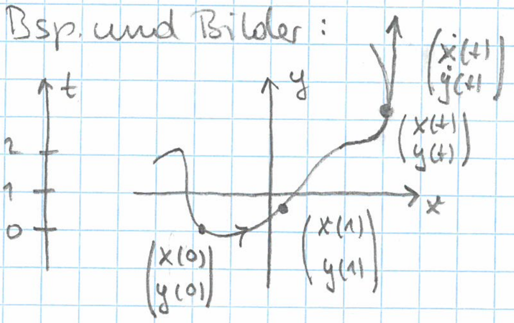


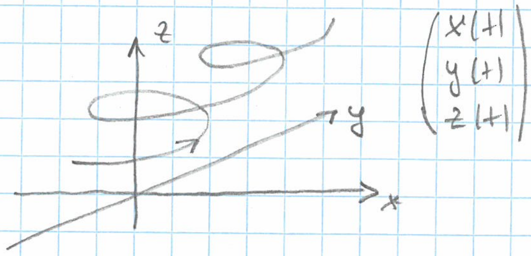
Konturplot

lineares Skalarfeld: $f(x,y) = 3x - 8y$ hat ebene Konturlinien u. Graph = Ebene

▷ Eine Kurve in $\mathbb{R}^n$ ist eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

Bsp. und Bilder:





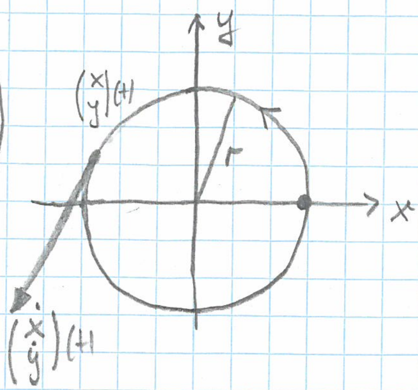
Kurve in der Ebene und im Raum

Gerade: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

Anfangsort $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$ Geschwindigkeitsvektor $\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$

Kreis: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}$

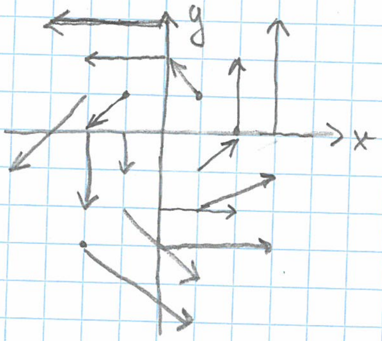
Kreisfrequenz ω



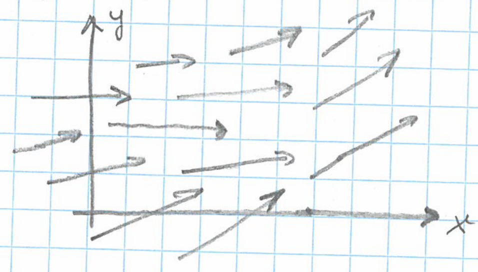
▷ Ein <u>Vektorfeld</u> auf <u>$\mathbb{R}^n$</u> ist eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Beispiele und Bilder:

$$R(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \quad \ldots \text{ Rotationsfeld}$$



Geschwindigkeitsfeld einer ebenen Strömung



<u>Operatoren</u>: div, grad, rot

$$\nabla\cdot \ , \ \nabla \ , \ \nabla\times$$

▷ Der <u>Gradient</u> macht aus einem Skalarfeld ein Vektorfeld.

Bsp: $z: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x,y) \mapsto z(x,y) = 3x^2y$

$\nabla z: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x,y) \mapsto \nabla z(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6xy \\ 3x^2 \end{pmatrix}$

Der Gradient $\nabla z(x,y)$ bei (x,y) zeigt in die <u>Richtung des stärksten Anstiegs</u> von z bei (x,y) und ist <u>orthogonal auf die Konturlinie</u> bei (x,y). Die Länge von $\nabla z(x,y)$ ist ein Maß für die <u>Stärke des Anstiegs</u>. Falls $z(x,y) = ax + by = (a,b)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ <u>linear</u> ist, ist $\nabla z = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ der <u>Koeffizientenvektor</u> von z und <u>Normalvektor auf die Kontur</u>=geraden.

<u>Schreibweisen</u>: grad(z), ∇z

<u>Nabla-Operator</u>: $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$ bzw. allg. $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

▷ Die Divergenz macht aus einem Vektorfeld ein Skalarfeld.

Bsp.: $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \longmapsto R(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

$\operatorname{div}(R) = \nabla \cdot R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto \nabla \cdot R = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \frac{\partial(-y)}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} = 0+0=0$$

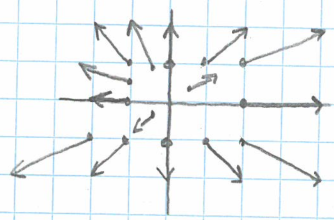
inneres Produkt „dot product"

Allg.: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$\operatorname{div}(f) = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial y_n}{\partial x_n}$$

Die Divergenz misst die Quelldichte des Vektorfeldes.

Bsp.: $V(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ hat Divergenz $\operatorname{div}(V) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} = 1+1=2$



▷ Die Rotation macht aus einem Vektorfeld ein Vektorfeld od. Skalarfeld.

Bsp.: $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : R(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

$$\operatorname{rot}(R) = \nabla \times R = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial -y}{\partial y} = 1+1=2$$

$V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : V(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\operatorname{rot}(V) = \nabla \times V = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} = 0-0=0$$

$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = \begin{pmatrix} -xy \\ z \\ z+x \end{pmatrix}$

$$\operatorname{rot}(F) = \nabla \times F = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -xy \\ z \\ z+x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ -[1-0] \\ 0-(-x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ x \end{pmatrix}$$

Die Rotation misst die Wirbeldichte des Vektorfeldes.