Differentialrechnung.

▷ Warum? und Wozu?

- lineare Approximation nicht-linearer Funktionen, Taylorreihe
- Optimalitätsbedingungen für nicht-lineare Optimierung
- kontinuierliche (nicht-) lineare dynamische Systeme
- Differentialgleichungen
- Physik, Chemie, Technik: Thermodynamik, Elektrotechnik, ...
- Integralrechnung: Arbeit, Wärme, pot. Energie, (nicht) Zustandsgrößen, Umkehrung der Differentialrechnung
- Lösen nicht-linearer Gleichungen und Gleichungssysteme: durch wiederholte lineare Approximation = Newton-Verfahren
- etc.

▷ Wiederholung der Differentialrechnung für Funktionen $f: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$

○ lineare Funktion (= lineare Abbildung)

Graph ist eine Gerade durch den Ursprung

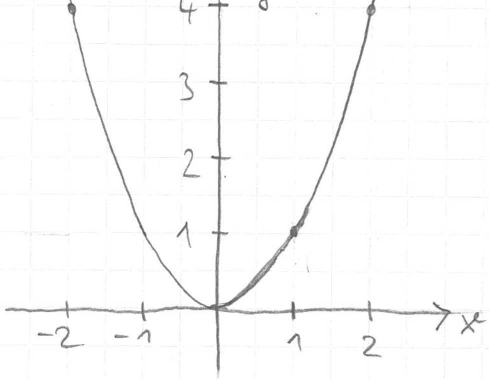
$y = f(x) = 0{,}5x$ vom Typ $\boxed{y = kx}$

hat Eigenschaft der Linearität:

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

„Bild einer lin. Kombination ist die lin. Kombination der Bilder."

● nicht-lineare Funktion (= nicht-lineare Abbildung)



$y = f(x) = x^2$

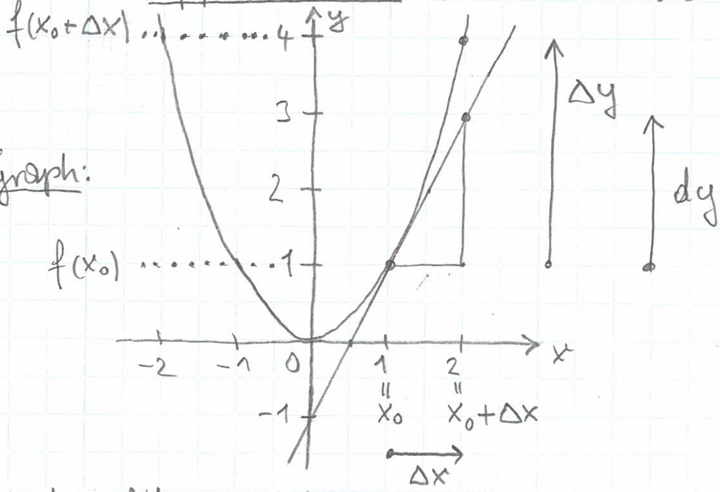
nicht vom Typ $y = kx$

hat nicht die Linearitätseigenschaft

Graph ist keine Gerade durch den Ursprung.

▷ Approximation der nicht-linearen Funktion $y = x^2$ bei $x_0 = 1$.

Graph:



Bezeichnungen:

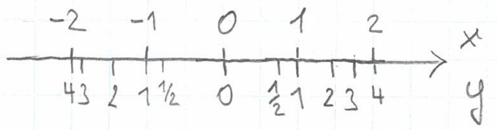
x_0 ... Stelle / Argument, an der linear approximiert / abgeleitet wird

Δx ... Differenz / Änderung in Inputvariable x

Δy ... wahre Differenz / Änderg. in Outputvariable y

dy ... approximierte Differenz / Änderung in y

Konturplot:



3	0	-1	0	3	Δy
-6	-4	-2	0	2	dy
-3	-2	-1	0	1	$dx = \Delta x$

$dx = \Delta x$ ... Wenn x keine Funktion einer anderen Variablen ist, d.h. eine unabhängige Variable, dann ist $\Delta x = dx$.

Beobachtungen: Für nicht-lineare Fkt. gilt $\Delta y \neq dy$ i.A..

Für lineare Fkt. gilt $\Delta y = dy$ immer.

Je kleiner Δx umso besser approximiert dy den wahren Wert Δy.

Berechnungen: $\underline{\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}$

$\underline{dy = f'(x_0) \cdot \Delta x}$ bzw. $\underline{dy = f'(x_0) \cdot dx}$

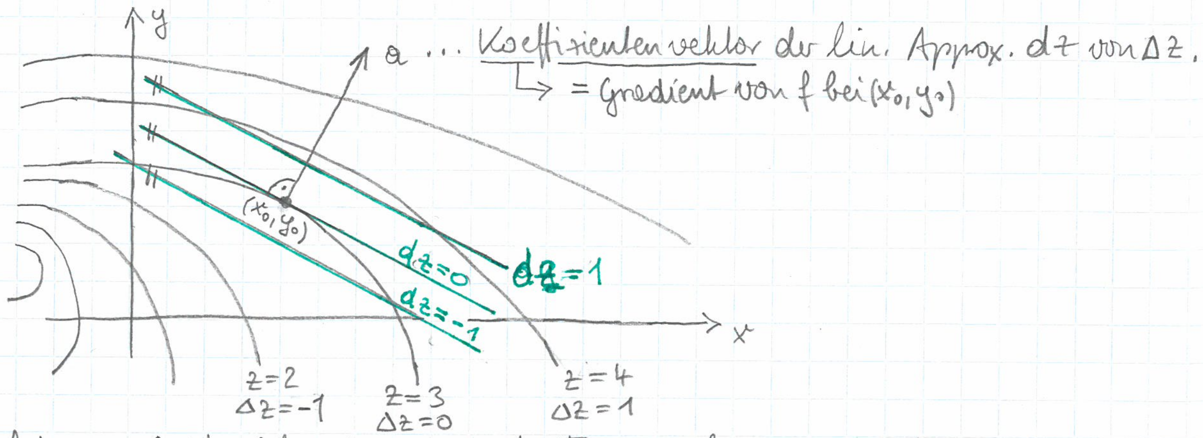
bzw. $\underline{\frac{dy}{dx} = f'(x_0)}$

vgl. $y = k \cdot x$

für lineare Fkt.

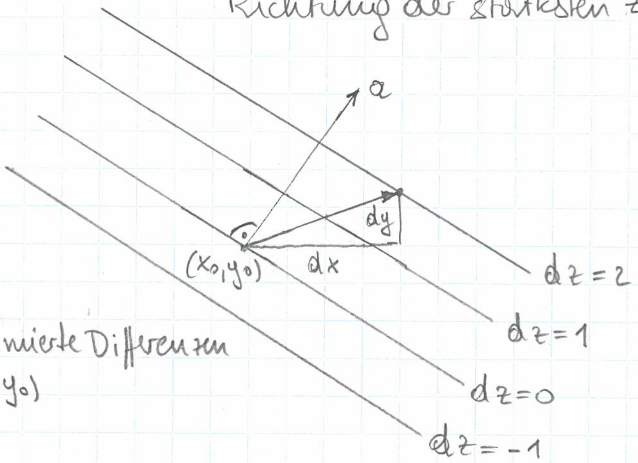
▷ Approximation einer nicht-linearen Fkt. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $z = f(x,y)$

Konturplot

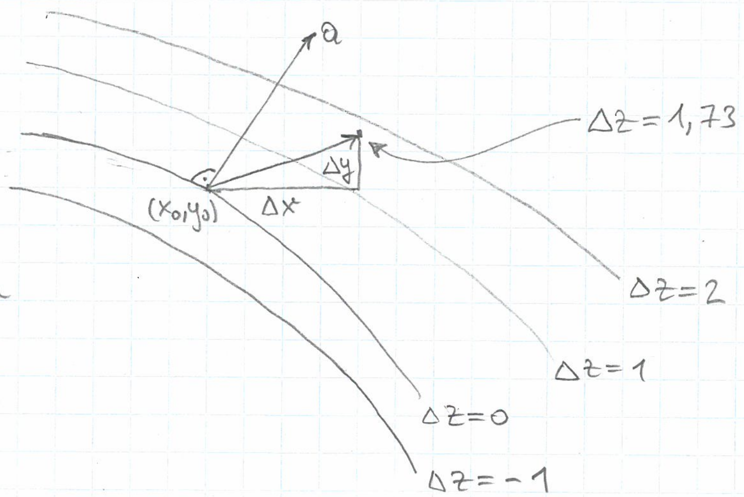


Achtung, ↗ ist nicht der Graph der Fkt. $z = f(x,y)$, sondern der Konturplot! x und y sind jetzt Inputvariablen!

Beobachtungen:
- Konturlinien der lin. Approx. dz von Δz sind parallele, äquidistante Geraden.
- Der Koeffizientenvektor der lin. Approx. ist orthogonal auf deren Konturlinien und zeigt in die Richtung der stärksten Zunahme von z bei (x_0,y_0).



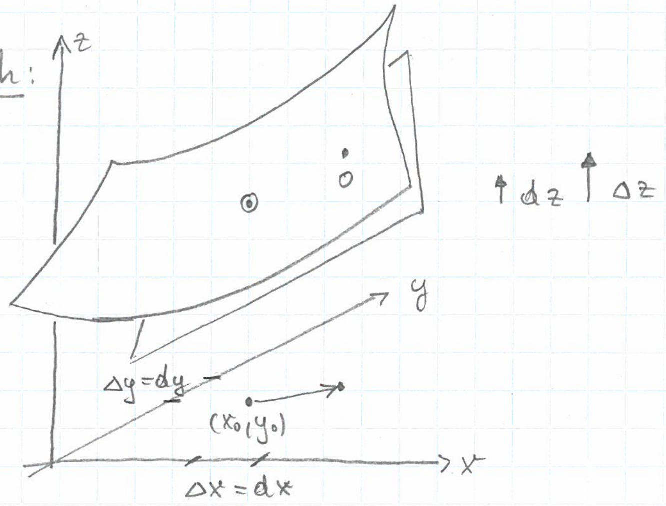
linear approximierte Differenzen bei (x_0,y_0)



wahre Differenzen bei (x_0,y_0)

$\Delta x = dx$
$\Delta y = dy$
$\Delta z \neq dz$

Graph:



Berechnung:

$$a = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

... Vektor der partiellen Ableitungen bei (x_0,y_0) = der Gradient von f bei (x_0,y_0)

$$dz = (a_x, a_y)\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

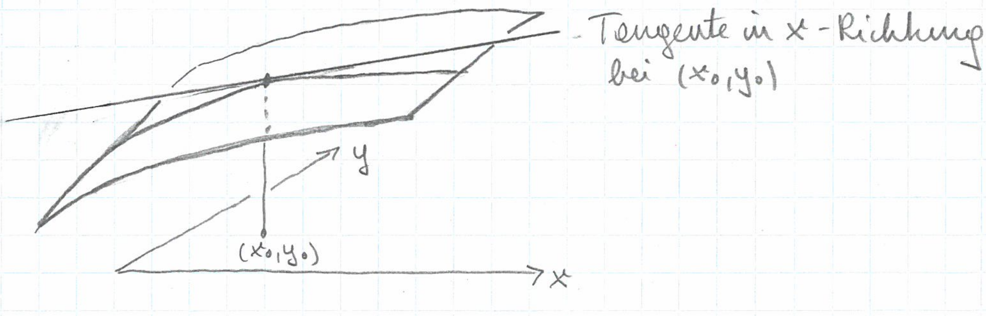
.... von dieser Form, da ja lineare Flt.

$$dz = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot dy$$

Bedeutung: Die partielle Ableitung von f bei (x_0,y_0) in x-Richtung wird als $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ geschrieben. Sie gibt die Änderungsrate von f bei (x_0,y_0) pro x-Einheit an und entspricht der Steigung der Tangente in x-Richtung an den Graphen von f bei (x_0,y_0).

Analog für $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.



▷ Berechnung von $\frac{\partial f}{\partial x}$ durch Ableiten nach x und Konstanthalten von y.

— " — $\frac{\partial f}{\partial y}$ — " — y — " — x.

Bsp.: $z = f(x,y) = 3x^2y - y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 - 2y$$

Die partiellen Ableitungen sind wiederum Funktionen von x und y, daher schreibt man auch oft $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

Auswerten bei (x_0,y_0):

Bsp. $x_0 = 1$ und $y_0 = 2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 12 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -1$$

▷ Schreibweisen und Begriffe:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}(x_0,y_0) = \underline{\mathrm{grad}(f)(x_0,y_0)} = \underline{\nabla f(x_0,y_0)}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \underline{\mathrm{grad}(f)} = \underline{\nabla f}$$

∇ ... Nabla-Operator: $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= f_x \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= f_y \end{aligned}\right\} \text{Kurzschreibweise,}$$

$$\underbrace{\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} \quad df = dz}_{\text{Name der Fkt.} \,\hat{=}\, \text{Name der Outputvariable}}$$

$$\underline{dz = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy} \text{ ... } \underline{\text{totales Differenzial von } z}$$

Beispiel: $z = f(x,y) = 3x^2y - y^2 \quad , (x_0, y_0) = (1,2)$

$$\nabla f(x_0,y_0) = \text{grad}(f)(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f(x_0,y_0) = 3 \cdot 1^2 \cdot 2 - 2^2 = 6 - 4 = \underline{2}$$

$$\Delta x = dx = 0{,}1$$

$$\Delta y = dy = 0{,}2$$

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(1{,}1,\ 2{,}2) = 3 \cdot 1{,}1^2 \cdot 2{,}2 - 2{,}2^2 = \underline{3{,}146}$$

$$\Delta z = 3{,}146 - 2 = \underline{1{,}146}.$$

$$dz = 12 \cdot 0{,}1 + (-1) \cdot 0{,}2 = \underline{1{,}000}.$$