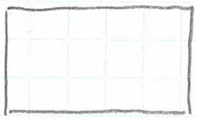
Matrizenrechnung

„Evolution" math. Objekte

1.) Zahlen, Skalare : $\cdot$ 1×1 (Zeilen $\times$ Spalten)

2.) Spaltenvektoren : $n \times 1$

Zeilenvektoren $1 \times n$

3.) Matrizen  $m \times n$

→ Zahlen und Vektoren können als Spezialfälle von Matrizen gesehen werden.

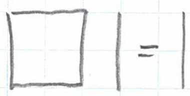
„Ansichten" $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ als Zeile von Spalten

als Spalte von Zeilen

Indizierung : zuerst Zeilenindex, dann Spaltenindex

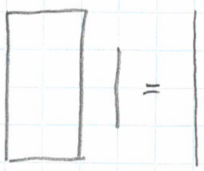
$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{m1} & \dots & & A_{mn} \end{pmatrix}$$

Lineare Gleichungssysteme in Matrixform $Ax = b$



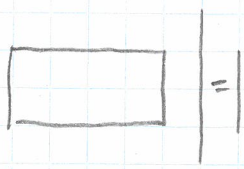
$n \times n$ $n \times 1$ $n \times 1$

quadratische Matrix, quadr. Glgsystem. gleichviele Variablen wie Glgn.



$m \times n$ $n \times 1$ $m \times 1$

dünne Matrix, überbestimmtes Glgsys. mehr Glgn als Variablen

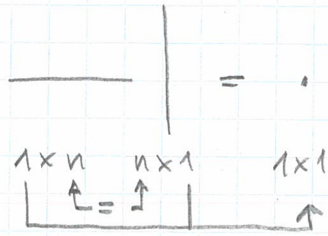


$m \times n$ $n \times 1$ $m \times 1$

fette Matrix, unterbestimmtes Glgsystem weniger Glg. als Variablen

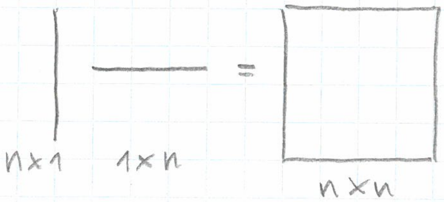
Matrizenmultiplikation

▷ Vektor × Vektor :



inneres Produkt

$a^T b$

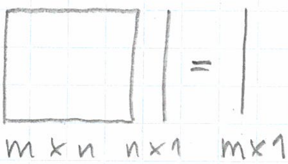


kein inneres Produkt!

$a b^T$

▷ Matrix × Vektor

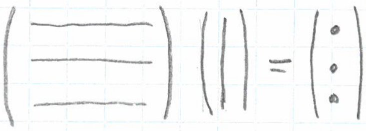
$A x$



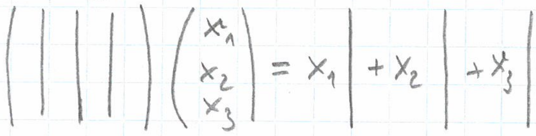
Indexnotation:

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j$$

zwei „Ansichten"



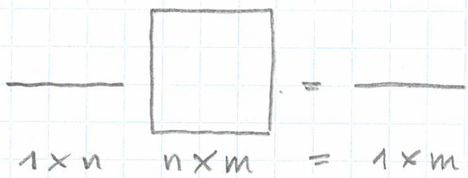
innere Produkte der Zeilen mit Vektor



Linearkombination der Spalten mit Vektorkomponenten

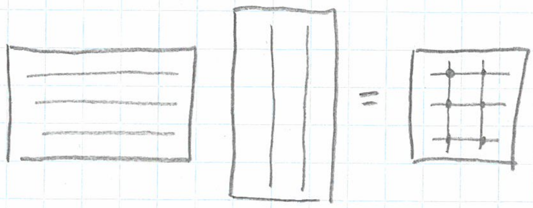
▷ Vektor × Matrix

$x^T A$



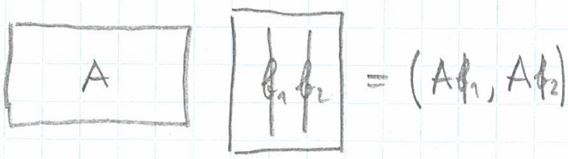
▷ Matrix × Matrix

$A B$



Matrix der inneren Prod. der Zeilen von A mit den Spalten von B

andere Sichtweise



Teile von Matrix × Vektor Multiplikationen

Hintereinanderschaltung (Verkettung, Komposition) von lin. Fkt.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^p \end{tikzcd}$$

$$\Big| \longmapsto \boxed{A}\Big| \longmapsto \boxed{B}\boxed{A}\Big|$$

$$x \longmapsto f(x) = Ax \longmapsto g(f(x)) = BAx$$

Andere Matrixoperationen:

- Addition: $\underset{m\times n}{A} + \underset{m\times n}{B} = \underset{m\times n}{C}$ ... elementweise
- Skalarmultiplikation: $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Zahl}}}{\alpha} A$ ... elementweise
- Transposition:

$$A \longmapsto A^T$$

$$\boxed{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{matrix}} \qquad \boxed{\begin{matrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{matrix}}$$

Spezielle Matrizen:

- Nullmatrix: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = 0$ ... Kurznotation, vgl. Nullvektor

$$A + 0 = A, \quad A \cdot 0 = 0$$

- Einheitsmatrix:

$$\mathbb{1} = I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$ ... 1er auf der Diagonalen, sonst Nullen

$$I \cdot A = A = A \cdot I$$

- Inverse Matrix: Zu viele quadr. Matrizen A gibt es die inverse Matrix A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot A = I = A \cdot A^{-1} \qquad (\text{vgl. } 5^{-1} \cdot 5 = 1 = 5 \cdot 5^{-1})$$

Falls A^{-1} existiert ist sie auch quadr. und eindeutig.

Anwendung: Lösung eines quadr. Glg.systems, für das A^{-1} existiert

$$Ax = b \quad | A^{-1}\cdot$$

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

$$Ix = A^{-1}b$$

$$\underline{x = A^{-1}b}$$

<u>Rechenregeln</u> $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha AB$$

$$C(A+B) = CA + CB$$

$$(A+B)C = AC + BC$$

$$A(BC) = (AB)C = ABC$$

Achtung: $AB \neq BA$ im Allgemeinen

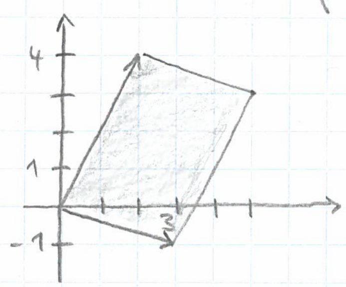
$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-T}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

<u>Determinante</u>: Eine Zahl, die zu jeder quadr. Matrix A berechnet werden kann. Notation $\det(A)$.

<u>Bsp.</u> $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$:



$$\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = ad - cb$$

$$\det(A) = 3 \cdot 4 - (-1) \cdot 2 = 14$$

$|\det(A)| =$ <u>Flächeninhalt</u> des von den Spaltenvektoren aufgespannten Parallelogramms.

<u>Allg.</u>: $\underset{n \times n}{A}$, die <u>Spaltenvektoren</u> von A spannen in $\mathbb{R}^n$ ein Parallelepiped auf, dessen <u>Volumen</u> gleich dem Betrag der Determinante von A ist.

<u>Theoreme</u>: ① $\det(A) \neq 0 \Rightarrow Ax = b$ hat eine eindeutige Lsg. für jedes b.

Beweis: $\underbrace{\text{Rang}(A) = n \Rightarrow \dim(\ker(A)) = 0}$

$\Rightarrow$ Existenz und Eindeutigkeit der Lsg.

② Für 2×2 Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Rechenregeln:

- $\det(A) \neq 0 \iff A^{-1}$ existiert
- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(I) = 1$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \det(A)^{-1}$