Lineare Gleichungssysteme

Eine <u>lineare Gleichung</u> in den Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ ist eine Gleichung der Form $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$, wobei b und die Koeffizienten $a_1, \dots, a_n$ gegebene Zahlen sind.

$\Rightarrow$ Jede lineare Gleichung kann als Konturlinie/ebene/hyperebene einer linearen Fkt. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(x) = a^T x$ mit $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ interpretiert werden.

Ein <u>lineares Gleichungssystem</u> besteht aus mehreren lin. Glg. in denselben Variablen.

Bsp. in $\mathbb{R}^2$:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 - 2x_2 = -1 & \rightarrow \text{Gerade} \\ -x_1 + 3x_2 = 3 & \rightarrow \text{Gerade} \end{array}\right\} \ \underline{\text{Lösungsmenge}} = \text{Schnittmenge.}$$

Zwei lin. Glg.systeme sind <u>äquivalent</u>, wenn sie dieselbe Lösungsmenge haben.

<u>Lösungsstruktur</u>: Ein lin. Glg.system kann
- keine Lösung haben oder
- genau eine Lösung haben oder
- unendlich viele Lösungen haben.

<u>Lösungsmethodik</u>: Ersetze das System durch ein äquivalentes, das einfacher zu lösen ist.

Äquivalenzumformungen:

① Ersetzen: Ersetze eine Zeile durch die Summe von sich selbst und ein Vielfaches einer anderen Zeile.

② Vertauschen: Vertausche zwei Zeilen

③ Skalieren: Multipliziere eine Zeile mit einer Zahl ungleich Null.

Zwei fundamentale Fragen:

① Existiert eine Lösung? (Existenz-Frage)

② Falls eine Lösung existiert, ist sie eindeutig? (Eindeutigkeit-Frage)

Im Folgenden werden wir beide Fragen beantworten, indem zuerst das Problem umformuliert wird.

Bsp.:
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_3 &= -1 \\ -x_1 + 3x_2 &= 3 \end{aligned} \iff x_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$$

lin. Glg. system

$\Updownarrow$

Schnittmenge der Geraden

Vektorgleichung

Welche Linearkombination(en) der Vektoren $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ ergibt $\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$?

$\downarrow$

Existenz-Frage: Eine Lösung existiert, wenn $\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ in der linearen Hülle von $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ liegt.

Eindeutigkeit-Frage:

Angenommen es gibt noch eine Lösung y_1, y_2.

$$x_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} = y_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + y_2\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$$

$$x_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} - y_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} - y_2\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$(x_1-y_1)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + (x_2-y_2)\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

vgl. $\quad \alpha_1 \quad v_1 \quad + \quad \alpha_2 \quad v_2 = 0$

Wenn $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ lin. unabh. sind, gibt es nur die triviale Lösung $x_1 - y_1 = 0$ und $x_2 - y_2 = 0$, also $x_1 = y_1$ und $x_2 = y_2$.

Eine Lösung ist eindeutig, wenn $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ lin. unabh. sind. Das ist übrigens genau dann der Fall, wenn das lin. Glg. sys.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}$$

nur die triviale Lsg. $x_1 = x_2 = 0$ hat.

Lineare Gleichungssysteme formuliert über lineare Funktionen:

Bsp.
$$x_1 - 2x_2 = -1$$
$$-x_1 + 3x_2 = 3$$

Trennen in Koeffizientenmatrix · Variablenvektor = rechte-Seite Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Matrixmultiplikation: „Zeile mal Spalte à la inneres Produkt"

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + (-2) \cdot x_2 \\ -1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lineare Funktion | Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

input… $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto f(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x}$ …. output

allg.: $A \cdot x$

Lin. Glg.system $\Longleftrightarrow$ Finde alle Inputs x, deren Output gleich $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist.

Allgemein: $\boxed{A \cdot x = b}$

Eigenschaften:
- Lineare Funktionen $f(x) = A \cdot x$ sind genau jene, die $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ erfüllen.
  (α, β: Zahlen; x, y: Inputvektoren)
- $f(0) = 0$ (Nullvektor)

Das Bild $\mathrm{im}(f)$ $(= \mathrm{im}(A))$ ist die Menge aller Outputvektoren.

Der Kern $\ker(f)$ $(= \ker(A))$ ist die Menge der Inputvektoren, deren Output der Nullvektor ist.

$\Rightarrow$ Eine Lsg. zu $Ax = b$ existiert, wenn $b \in \mathrm{im}(A)$.

$\Rightarrow$ Eine Lsg zu $Ax = b$ ist eindeutig, wenn $\ker(A) = \{0\}$.

Rangsatz: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $f(x) = Ax$

Dimension des Inputraums $n = \dim(\ker(A)) + \underbrace{\dim(\mathrm{im}(A))}_{=:\text{ Rang von } A}$