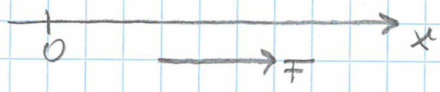
Differentialgleichungen – Teil 1

I) Einführungsbeispiele

① Newtonsche Bewegungsgleichung mit konstanter Kraft, z. B. freier Fall, konstante Beschleunigung eines Fahrzeugs



m … Masse, t … Zeit

x … Ort

F … konstante Kraft

$$\boxed{m\ddot{x} = F}$$

genauer $m\dfrac{d^2x}{dt^2}(t) = F$, gesucht: $x(t)$

$\ddot{x} = \dfrac{F}{m} = a$ … konstante Beschleunigung, z. B. $g = 9{,}81$

$\int \ddot{x}(t)\,dt = \int a\,dt$ … unbestimmte Integration

$\dot{x}(t) = at + C_1$

$\int \dot{x}(t)\,dt = \int at + C_1\,dt$ … unbest. Integration

$\underline{x(t) = \frac{1}{2}at^2 + C_1 t + C_2}$ … allg. Lösung: enthält 2 Integrationskonstanten C_1, C_2

2 Anfangsbedingungen, d. h. bei $t = 0$:

(a) $x(0) = 2$ … Anfangsort

(b) $\dot{x}(0) = 5$ … Anfangsgeschwindigkeit

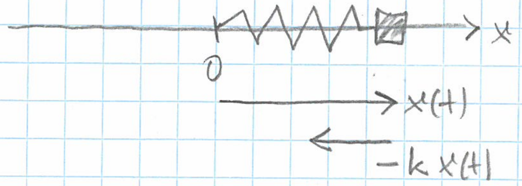
$\dot{x}(0) = C_1 = 5$, daher ist $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + 5t + C_2$

$x(0) = C_2 = 2$, daher ist $\underline{x(t) = \frac{1}{2}at^2 + 5t + 2}$.

partikuläre Lösung: enthält keine Integrationskonstanten und ist die eindeutige Lösung zu den Anfangsbedingungen

② Newtonsche Bewegungsgleichung mit linearer Rückstellkraft, z.B. freie Schwingung:

$m\ddot{x} = F$ mit $F = -kx$, k... Federkonstante, $k>0$



genauer $m\ddot{x}(t) = -k\,x(t)$: unbestimmte Integration beider Seiten hilft nicht.

Lösung: $\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}\,x(t)$, Definiere $\omega^2 = \frac{k}{m}$

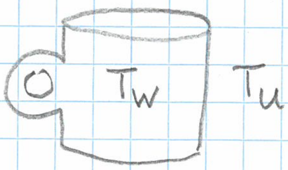
Lösung ist gegeben durch

$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ mit den zwei Integrationskonstanten A und B, die mit zwei Anfangsbedingungen bestimmt werden können.

③ Newtons Abkühlgesetz

T_W ... Temperatur des Glühweins

T_U ... Umgebungstemperatur, konstant



$\dot{Q} = -d\,(T_W - T_U)$ d... Konstante, $d>0$, Abkühlkoeffizient

$\uparrow$ Wärmemenge pro Zeit

$Q = c\,m\,T_W \Rightarrow \dot{Q} = c\,m\,\dot{T}_W$

$\uparrow$ spez. Wärmekapazität

Beachte, dass $(T_W - T_U)\dot{} = \dot{T}_W - \dot{T}_U = \dot{T}_W - 0 = \dot{T}_W$

und somit $\dot{Q} = c\,m\,\dot{T}_W = c\,m\,(T_W - T_U)\dot{}$

Verwende $T := T_W - T_U$, die Temperaturdifferenz. Dann gilt $c\,m\,\dot{T} = -d\,T$ bzw. $\dot{T} = -\underbrace{\frac{d}{cm}}_{=:\lambda} T$ bzw. $\underline{\dot{T} = -\lambda T}$.

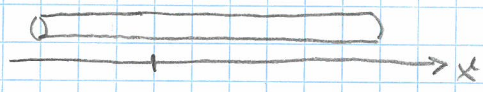
$\dot{T} = -\lambda T$: Änderung ist ein Vielfaches des Istwertes: vgl. Zinsen, Radioaktivität, Bevölkerungswachstum, ...

Lösung: $\underline{T(t) = C \cdot e^{-\lambda t}}$ mit C einer Integrations= konstante, die den Anfangswert angibt:

$T(0) = C \cdot e^{-\lambda \cdot 0} = C \cdot 1 = C$. Daher:

$\underline{T(t) = T(0) \cdot e^{-\lambda t}}$.

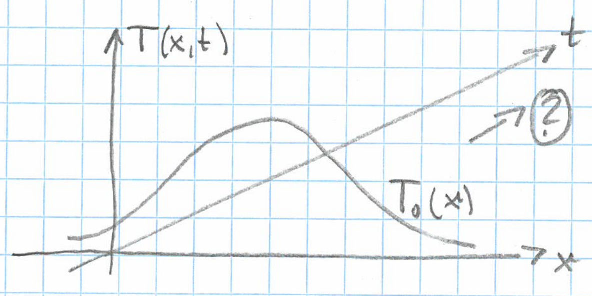
④ Wärmeleitungsgleichung:

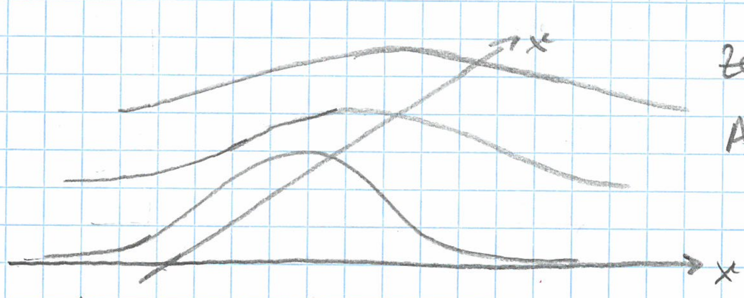


Metallstab mit anfänglicher Temperaturverteilung $T_0(x)$

Wie entwickelt sich die Temperatur an jedem Ort x mit der Zeit t? → Beschreibung mittels einer Funktion $T(x,t)$, die zum Zeitpunkt $t=0$ mit $T_0(x)$ übereinstimmt:

$T(x,0) = T_0(x)$





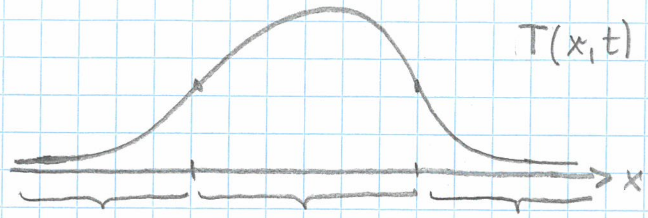
Zerfließen der Anfangsverteilung

Dynamik wird durch die partielle Differentialgleichung

$$\underline{\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = a \, \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t)}$$ beschrieben.

a ... Temperaturleitfähigkeit des Metallstabs

$T(x,t)$ für eine fixe Zeit t



$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} > 0$	$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} < 0$	$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} > 0$
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
$\frac{\partial T}{\partial t} > 0$	$\frac{\partial T}{\partial t} < 0$	$\frac{\partial T}{\partial t} > 0$
steigende	fallende	steigende Temperatur

Verallgemeinerung in 3 räumliche Dimensionen x, y und z:

$$T(x,y,z,t)$$

Für einen fixierten Zeitpunkt t gibt der räumliche Gradient mal $-k$ den Wärmefluss an:

$$-k \nabla T = \vec{q} \quad [W/m^2] \quad , k \dots \text{thermische Konduktivität}$$

▷ Begriffe und Klassifizierung

- Eine gewöhnliche Differentialgleichung (GDGL) beschreibt das Verhalten einer Funktion, die von einer Variablen abhängt.
  Eine partielle Differentialgleichung (PDGL) .... von mehr als einer Variablen....

  Englisch: ordinary differential equation (ODE)
  partial — " — (PDE)

- Lineare DGL enthalten nur lineare Terme der unbekannten Funktion und ihrer (partl.) Ableitungen. Rest: nicht-lineare DGL

Bsp: $y' = xy + 1$ .... linear

$y'' + xy + y^2 = 0$ ... nicht-linear

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ ... nicht-linear

$a_0(x)\frac{dy}{dx} + a_1(x)\, y = g(x)$ ... linear

- Die <u>Ordnung einer DGL</u> ist die Ordnung der höchsten vorkommenden (gemischten, partiellen) Ableitung.

$$y' = xy + 1 \qquad 1.\,\text{Ordg.}$$

$$y'' + xy + y^2 = 0 \qquad 2.\,\text{Ordg}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad 2.\,\text{Ordg.}$$

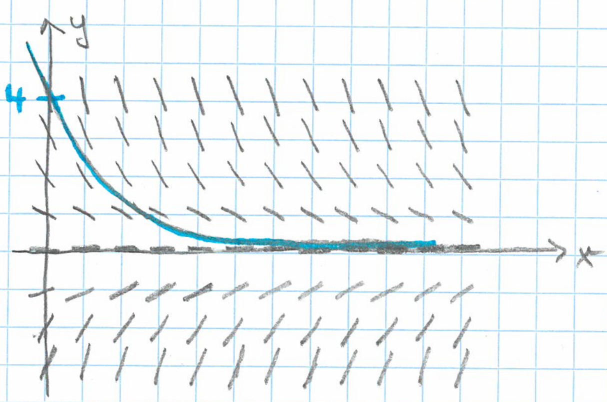
- <u>allgemeine Lösung</u>: enthält Integrationskonstanten, die durch Vorgabe von Anfangs- oder Randwerten bestimmt werden können
- <u>partikuläre (oder spezielle) Lösung</u>: enthält keine unbestimmten Integrationskonstanten

$\underbrace{\text{DGL + Anfangswerte od. Randwerte}}_{\text{Anfangs- bzw. Rand=wertproblem}}$ > Lösen liefert eine partikuläre Lösung

D <u>Graphische Darstellung von GDGL 1. Ordnung mittels Richtungsfeld</u>

<u>Bsp:</u> $y' = -0{,}3\,y$ ... Steigung y' ist $-0{,}3$ mal dem Funktionswert y.

$y'(x) = -0{,}3\,y(x)$

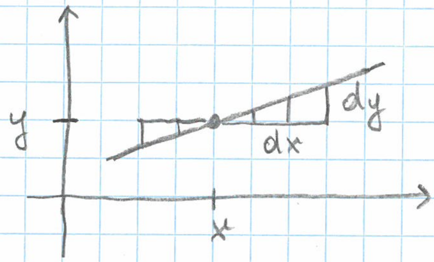


spez. Lsg.
$y(t) = 4\,e^{-0{,}3t}$

Allgemein: $y'(x) = f(x, y(x))$

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad \Big| \cdot dx$$

$$\underbrace{dy}_{\text{lin. approx. Änderung in } y\text{-Größe}} = \underbrace{f(x,y)}_{\text{Proportionalitätsfaktor, Steigung}} \underbrace{dx}_{\text{Änderung in } x\text{-Größe}}$$



D) Analytische Lösungsmethoden für gDGL 1. Ordnung

① Trennung der Variablen

Bsp: $y' = 2y$ — Schreibe y' als $\frac{dy}{dx}$ und multipl. mit dx

$dy = 2y\,dx$ — Trennen der Variablen

$\frac{1}{y}\,dy = 2\,dx$ — unbestimmte Integration

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int 2\,dx$$

$$\ln|y| = 2x + C$$

$$|y| = e^{2x+c} = e^c \cdot e^{2x}$$

$$y = \underbrace{\pm e^c}_{= k \ldots \text{konstant}} \cdot e^{2x} = k\,e^{2x}, \quad k = y(0) \ldots \text{Anfangsbed.}$$

$$\underline{\underline{y = y(0)\,e^{2x}}}$$

Bsp. Anfangswertproblem $3y' + y^4 \cos x = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$

$$3\frac{dy}{dx} = -y^4 \cos x$$

$$\frac{3}{y^4}\,dy = -\cos x\,dx$$

$$3\int y^{-4}\,dy = -\int \cos x\,dx$$

$$3\,\frac{y^{-3}}{-3} = -\sin x + C$$

$$\frac{1}{y^3} = \sin x - C$$

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{\sin(x) - C}}$$ ... allgemeine Lösung

Anfangswert: $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - C}} \overset{!}{=} \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow C = -7$$

partik. Lösung: $y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{\sin(x) + 7}}$.

② Integration exakter DGL

Bsp.: $\dot{y} = \frac{2t+y}{y-t}$ Bem: Variablen lassen sich nicht trennen

$\frac{dy}{dt} = \frac{2t+y}{y-t}$ Ausmultiplizieren

$(y-t)\,dy = (2t+y)\,dt$ Alles auf eine Seite bringen

$$\underbrace{(2t+y)\,dt + (t-y)\,dy} = 0$$

Differential in den Variablen t und y.

Ist das Differential exakt (df einer Funktion $f(t,y)$) oder inexakt (δf) ?

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial t \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2t+y \\ t-y \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial t}(t-y) - \frac{\partial}{\partial y}(2t+y) =$$

$$= 1 - 1 = 0 \Rightarrow \text{exakt.}$$

Es gibt daher eine Funktion $f(t,y)$ mit

$$df = \underbrace{(2t+y)}\,dt + \underbrace{(t-y)}\,dy$$

Daher muss $= \frac{\partial f}{\partial t}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2t + y$$

$$f(t,y) = \int 2t + y \, dt + g(y)$$

$$f(t,y) = t^2 + yt \qquad \Big| \frac{\partial}{\partial y}$$

$\frac{\partial f}{\partial y} = t + g'(y)$ muss gleich $t - y$ sein.

$$t + g'(y) = t - y$$

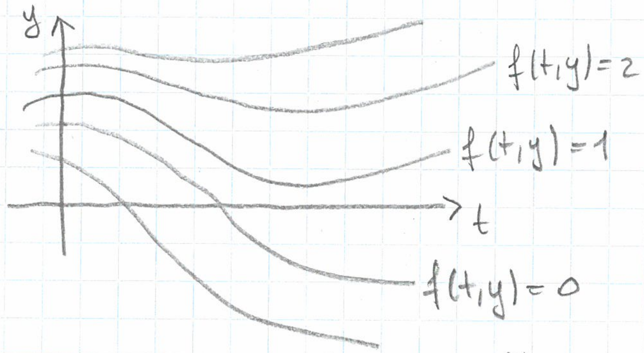
$$g'(y) = -y$$

$g(y) = -\frac{y^2}{2} + C$ mit C einer Integrationskonstanten

Insgesamt ist daher $f(t,y) = t^2 + yt - \frac{y^2}{2} + C$.

Die DGL $\dot{y} = \frac{2t+y}{y-t}$ ist also gleichwertig zur Differential-Gleichung $df = 0$. D.h. Lösungen $y(t)$ der DGL haben die Eigenschaft, dass $f(t, y(t))$ konstant ist. f ist entlang $y(t)$ eine Erhaltungsgröße.

Bild



Konturlinien von f sind Lösungen der DGL.

Rechnung: $t^2 + yt - y^2/2 + C = \tilde{C}$ Konstante $|\cdot(-2)$

$$y^2 - 2yt - 2t^2 \underbrace{-2[C - \tilde{C}]}_{=: \bar{C} \text{ Konstante}} = 0$$

$$y(t) = t \pm \sqrt{t^2 + 2t^2 - \bar{C}}$$

$$\underline{\underline{y(t) = t \pm \sqrt{3t^2 - \bar{C}}}}.$$

<u>Bsp.</u> $\dot{y} = a y$ Diesmal mit Methode der Integration exakter DGL

$$\frac{dy}{dt} = a y$$

$$dy - a y\, dt = 0$$

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial y \\ \partial/\partial t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -a y \end{pmatrix} = -a - 0 = -a \neq 0 \text{ (außer für } a=0)$$

$dy - a y\, dt$ ist also nicht exakt.

<u>Aber:</u> $dy - a y\, dt = y \underbrace{\left[\frac{1}{y} dy - a\, dt \right]}_{\text{ist exakt, denn:}}$ und

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial y \\ \partial/\partial t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/y \\ -a \end{pmatrix} = 0 - 0 = 0 .$$

Es gilt also $y \cdot \left[\frac{1}{y} dy - a\, dt \right] = 0$

D.h. entweder ist $\underbrace{y = 0}_{\text{Lsg. } \underline{y(t)=0}}$ oder $\underbrace{\frac{1}{y} dy - a\, dt = 0}_{\text{Lsg.}}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{y} dy &= d(\ln|y|) \\ -a\, dt &= d(-at) \end{aligned}\right\rangle \quad \begin{aligned} &\frac{1}{y} dy - a\, dt = \\ &d(\ln|y| - at) \end{aligned}$$

$$\ln|y| - at = C$$

$$\ln|y| = C + at$$

$$|y| = e^{C+at} = \underbrace{e^C}_{>0 \text{ aber nicht Null!}} \cdot e^{+at}$$

$$y = \underbrace{\pm e^C}_{\text{nicht Null}} \cdot e^{+at} \qquad y(0) = \pm e^C \cdot 1$$

$$y(t) = \overbrace{y(0)}\, e^{+at}$$

Beide Lsgen zusammen: $\underline{\underline{y(t) = C e^{+at}}}$, $C \in \mathbb{R}$ also auch Null möglich

Bsp. 1-dim. Massenpunkt in einem konservativen Kraftfeld.

Newton: $m\ddot{x} = F(x)$ ... ortsabhängige Kraft

Wir führen als zusätzliche Größe die Geschwindigkeit v ein: $v(t) = \dot{x}(t)$. Dann erhalten wir 2 DGL 1. Ordg.:

$$\dot{x} = v \qquad m\dot{v} = F$$

$$\frac{dx}{dt} = v \qquad m\frac{dv}{dt} = F$$

$$dx = v\,dt \qquad m\,dv = F\,dt \quad |\cdot v$$

$$m\,v\,dv = F\,v\,dt$$

$$m\,v\,dv = F\,dx \quad \text{... exakte DGL}$$

$$d\left(m\frac{v^2}{2}\right) = d(-U) \quad \text{... } U(x) \text{ pot. Energie zu } F(x)$$

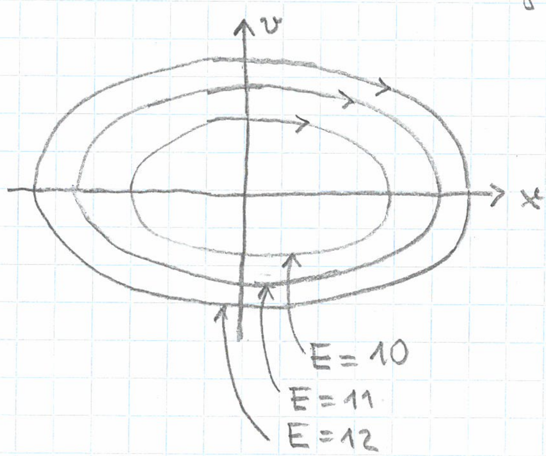
$$d\left(m\frac{v^2}{2} + U\right) = 0$$

D.h. entlang jeder Lösung der Bewegungsgleichung ist die Größe $m\frac{v^2}{2} + U$ erhalten. genauer

$$m\frac{\dot{x}(t)^2}{2} + U(x(t)) = E \text{ ... Konstante, genannt die}$$

Gesamtenergie.

Bild: Phasenraum = Ort-Geschw.-Raum



Bsp. $F(x) = -kx$ (Feder)

$$U(x) = k\frac{x^2}{2}$$

$$\underbrace{E = m\frac{v^2}{2} + k\frac{x^2}{2}}_{\text{Ellipsen im Phasenraum}}$$

③ Lineare DGL erster Ordnung

Typ: $\boxed{\dot{y}(t) + a(t)\, y(t) = b(t)}$ für gegebene Fkt. $a(t)$ und $b(t)$

(a) konstante Koeffizientenfunktionen: $a(t) = a \in \mathbb{R}$

Bsp.: $\dot{y}(t) + 7\, y(t) = 4$ $\qquad b(t) = b \in \mathbb{R}$

allg.: $\dot{y}(t) + a\, y(t) = b$

Frage: Ist ↑ eine exakte DGL?

$$\frac{dy}{dt} + a\, y = b \quad | \cdot dt$$

$$dy + (ay - b)\, dt = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} \partial/\partial y \\ \partial/\partial t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ ay - b \end{pmatrix} = a - 0 = a \overset{\text{i.A.}}{\neq} 0$$

Antwort: Im Allgemeinen Nein.

Aber: Herausheben von $(ay-b)$ liefert

$$\underbrace{(ay-b)}_{\downarrow}\Big[\underbrace{\frac{1}{ay-b}\, dy + dt}\Big] = 0$$

Lsg.
$ay - b = 0$

$y = \frac{b}{a}$ konstante

„steady state" - Lösung

exakt, weil $\begin{pmatrix} \partial/\partial y \\ \partial/\partial t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{ay-b} \\ 1 \end{pmatrix} = 0 - 0 = 0$

Daher lässt sich $\frac{1}{ay-b}\, dy + dt$ als exaktes Differential schreiben:

Rechnung: $\frac{1}{ay-b}\, dy = d\left[\frac{1}{a} \ln|ay-b|\right]$

$$\frac{1}{ay-b}\, dy + dt = d\Big[\underbrace{\frac{1}{a}\ln|ay-b| + t}_{\Rightarrow\ =\ \text{konstant}}\Big] = 0$$

$$\frac{1}{a} \ln|ay-b| + t = \text{konst.} \quad | \cdot a$$

$$\ln|ay-b| = -at + \text{konst}$$

$$|ay-b| = e^{\text{konst}} \cdot e^{-at}$$

$$ay - b = \pm e^{\text{konst}} \cdot e^{-at}$$

$$y(t) = \underbrace{\pm\frac{1}{a}e^{konst}}_{konst}\cdot e^{-at} + \frac{b}{a}$$

Anfangswert $y(0) = konst \cdot 1 + \frac{b}{a}$

$$konst = y(0) - \frac{b}{a}$$

$$y(t) = \left(y(0) - \frac{b}{a}\right)e^{-at} + \frac{b}{a}$$

$$\boxed{y(t) = y(0)\,e^{-at} + \frac{b}{a}\left(1 - e^{-at}\right)}$$

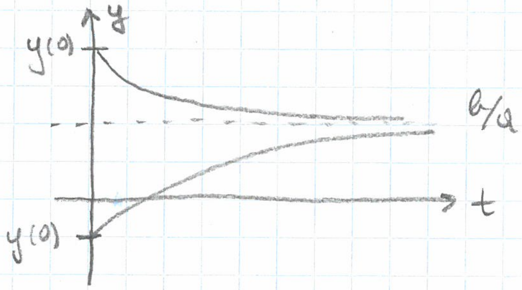
Falls $a \geq 0$:

$$\underbrace{e^{-at}}_{1 \to 0} \qquad \underbrace{1-e^{-at}}_{0 \to 1}$$

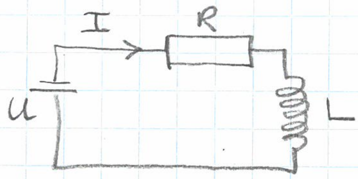
$$\underbrace{\underbrace{y(0) \longrightarrow 0}_{} \qquad \underbrace{0 \longrightarrow \frac{b}{a}}_{}}_{y(0) \longrightarrow \frac{b}{a}}$$

Vom Anfangswert zum steady state, und je größer a umso schneller.

Bild:



Beispiel: elektrischer Schaltkreis wird beschrieben durch die lineare DGL 1. Ordg.

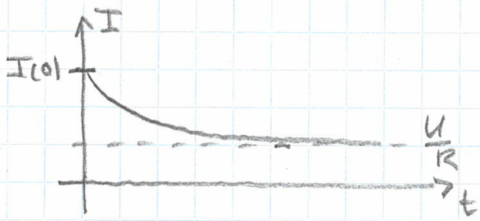


$$L\dot{I} + RI = U$$

$$\dot{I} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{a}I = \underbrace{\frac{U}{L}}_{b}$$

Einsetzen in Lsg.formel liefert:

$$I(t) = I(0)\,e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$



Beispiel: Ein See enthielt $4 \cdot 10^7$ Liter reines Wasser zum Zeitpkt $t=0$. Anschließend fließt verschmutztes Wasser in den See, das 0,67 Liter Schadstoff und 10 Liter Wasser pro Sekunde in den See bringt. Wir nehmen an, dass sich das eingebrachte verschmutzte Wasser sofort mit dem Seewasser vermischt. 10,67 Liter/Sek fließen aus dem See hinaus. Finden Sie die Menge an Schadstoff als Funktion der Zeit.

$y(t)$... Liter Schadstoff im See nach t Sekunden.

Anteil an Schadstoff pro Liter Seewasser: $\frac{y(t)}{4 \cdot 10^7}$

$$\dot{y}(t) = -10{,}67 \cdot \frac{y(t)}{4 \cdot 10^7} + 0{,}67$$

$$\dot{y} + \underbrace{2{,}67 \cdot 10^{-7}}_{a}\, y = \underbrace{0{,}67}_{b} \quad , \quad y(0) = 0$$

$$y(t) = \frac{b}{a}\left(1 - e^{-at}\right)$$

$$= \frac{0{,}67}{2{,}67} \cdot 10^7 \left(1 - e^{-2{,}67 \cdot 10^{-7} \cdot t}\right)$$

$$= \underbrace{2{,}51 \cdot 10^6}_{\text{steady state}} \left(1 - e^{-2{,}67 \cdot 10^{-7} \cdot t}\right)$$

$$\frac{y(t)}{4 \cdot 10^7} \xrightarrow[\text{für } t \to \infty]{} \frac{2{,}51 \cdot 10^6}{4 \cdot 10^7} \cong \underline{0{,}063} = \frac{0{,}67}{10{,}67}$$

Wann werden 90% dieses Grenzwertes erreicht?

$$1 - e^{-2{,}67 \cdot 10^{-7} \cdot t} = 0{,}9$$

$$e^{-2{,}67 \cdot 10^{-7} \cdot t} = 0{,}1$$

$$-2{,}67 \cdot 10^{-7}\, t = \ln(0{,}1)$$

$$t = -\frac{\ln(0{,}1)}{2{,}67} 10^7 \cong 862314 \text{ Sekunden}$$

$$\cong 100 \text{ Tage} \cong 3{,}33 \text{ Monate.}$$

<u>Beispiel:</u> Um Mitternacht ist die Raumtemperatur in der FHV 20°C und außen −5°C. Die Heizung fällt aus. Zwei Stunden später ist die Raumtemp. nur noch 10°C.

Frage: Wann hat es nur noch 5°C in der FHV?

Newtons Abkühlgesetz: T… Raumtemp., T_A… Außentemp.

$$\dot{T} = -\lambda (T - T_A) \quad , T(0) = 20 \quad , \lambda = ?$$

$$\dot{T} + \underbrace{\lambda}_{a} T = \underbrace{\lambda T_A}_{b}$$

$$T(t) = T(0)\, e^{-at} + \frac{b}{a}(1 - e^{-at})$$

$$= 20\, e^{-\lambda t} + T_A (1 - e^{-\lambda t})$$

Bei $t = 2$ ist $T(2) = 10$:

$$10 = 20\, e^{-2\lambda} - 5(1 - e^{-2\lambda})$$

$$15 = 25\, e^{-2\lambda}$$

$$e^{-2\lambda} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

$$-2\lambda = \ln(3/5)$$

$$\underline{\lambda} = -\frac{\ln(3/5)}{2} \cong \underline{0{,}2554 \ 1/h}$$

Wann ist $T = 5$?

$$5 = 20\, e^{-\lambda t} - 5(1 - e^{\lambda t})$$

$$10 = 25\, e^{-\lambda t}$$

$$e^{-\lambda t} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

$$-\lambda t = \ln(0{,}4)$$

$$t = -\frac{\ln(0{,}4)}{\lambda} \cong \frac{-\ln(0{,}4)}{0{,}2554} \cong \underline{3{,}587\ h}.$$

Allgemeiner Fall der linearen DGL 1. Ordg.

$$\dot{y}(t) + a(t)\, y(t) = b(t)$$

$$\frac{dy}{dt} + a\, y = b \quad | dt$$

$$dy + a\, y\, dt = b\, dt$$ ist i. A. nicht exakt.

Trick: Bestimme eine Stammfunktion $A(t)$ von $a(t)$, d.h. $A(t) = \int a(t)\, dt$ und multipliziere die obige Gleichung mit e^A

$$\underbrace{e^A dy + e^A a\, y\, dt}_{= d(e^A y)} = e^A b\, dt$$ ... exaktes Differential

$$= d(e^A y) \underset{\uparrow \text{Check}}{=} e^A a\, y\, dt + e^A dy \quad ✓$$

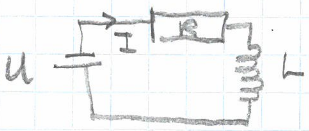
$$d(e^A y) = e^A b\, dt \quad | \int$$

$$e^A y = \int e^A b\, dt + C \quad | \cdot e^{-A}$$

$$\boxed{y = e^{-A}\left[\int e^A b\, dt + C\right]}$$

genauer: $$\underline{y(t) = e^{-A(t)}\left[\int e^{A(t)} b(t)\, dt + C\right]}$$

Beispiel: Elektrischer Schaltkreis mit $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$



$$L\dot{I} + R\, I = U$$

$$\dot{I} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{a} I = \underbrace{\frac{U_0}{L}\sin(\omega t)}_{b}$$

$$A = at \quad , \quad \underline{\int e^{at} b\, dt} = \int e^{\frac{R}{L}t} \cdot \frac{U_0}{L}\sin(\omega t)\, dt =$$

$$= \frac{U_0}{L}\int e^{\frac{R}{L}t}\sin(\omega t)\, dt \underset{\uparrow}{=} \underline{\frac{U_0}{L}\frac{e^{R/L\, t}}{(R/L)^2 + \omega^2}\left(\frac{R}{L}\sin(\omega t) - \omega\cos(\omega t)\right)}.$$

Formel $$\int e^{at}\sin(bt)\, dt = \frac{1}{a^2+b^2} e^{at}\left(a\sin(bt) - b\cos(bt)\right)$$

oder zweimal partiell integrieren

$$I(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left[\frac{U_0}{L}\frac{e^{\frac{R}{L}t}}{\left(\frac{R}{L}\right)^2+\omega^2}\left(\frac{R}{L}\sin(\omega t)-\omega\cos(\omega t)\right)+C\right] =$$

$$= \underbrace{\frac{U_0}{L}\frac{1}{\left(\frac{R}{L}\right)^2+\omega^2}\left(\frac{R}{L}\sin(\omega t)-\omega\cos(\omega t)\right)}_{\text{harmonische Schwingung mit Kreisfrequenz } \omega.} + \underbrace{C\cdot e^{-\frac{R}{L}t}}_{\to 0}$$