Lineare Optimierung

Beispiele: Einführungsbeispiel,

Das folgende Bsp. stammt aus dem Buch „Linear Programming with Matlab" von Ferris, Mangasarian, Wright, p. 2f.

Problemstellung: Ein Bauer hat 3 Kühe, die 22 Gallonen (1 Gallone = 3,785... Liter) Milch pro Woche geben. Aus der Milch kann er Eiscreme und Butter machen. Dazu braucht er:

2 Gallonen Milch für 1 kg Butter

3 — " — 1 Gallone Eiscreme

Es gibt keine Lagerrestriktionen für Butter, Eiscreme kann er max. 6 Gallonen lagern. Er hat 6 Stunden pro Woche für die Herstellung zur Verfügung. Folgende Arbeitszeiten benötigt die Herstellung

1 Stunde für 4 Gallonen Eiscreme

— " — 1 kg Butter

Alles, was er produziert, kann er verkaufen (vollständiger Absatz):

5 \$ pro Gallone Eiscreme

4 \$ pro kg Butter

Ziel: Wieviele Gallonen Eiscreme und wieviele kg Butter soll er herstellen, sodass er max. Profit hat?

Formulierung als math. Problem:

Entscheidungsvariablen: x_1... Gallonen Eiscreme, x_2... kg Butter } die hergestellt werden

Zielfkt.: Profit $= 5x_1 + 4x_2 \rightarrow$ max.

Nebenbedingungen:

$x_1 \leq 6$ (Lagerung von Eiscreme)

$\frac{1}{4}x_1 + x_2 \leq 6$ (Arbeitszeit)

$3x_1 + 2x_2 \leq 22$ (verfügbare Milch)

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$ (keine neg. Variablenwerte)

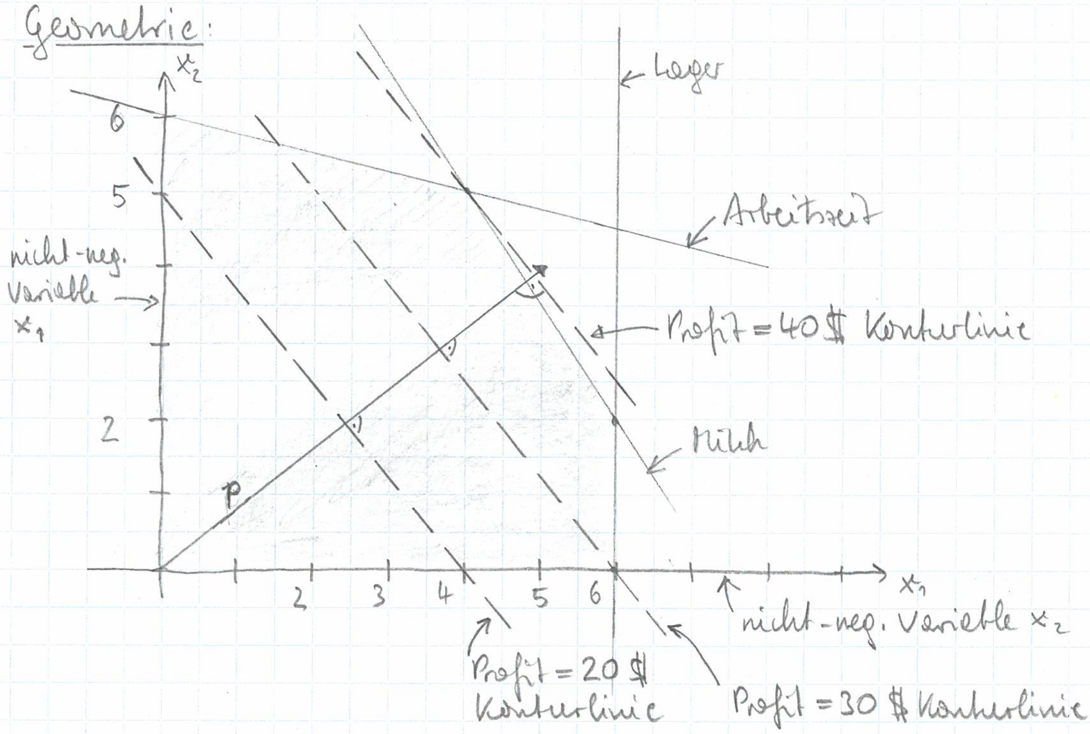
Zusammenfassung:

$$\max. \quad 5x_1 + 4x_2 \qquad \ldots \text{ Zielfkt}$$

so dass (engl. s.t. such that, subject to)

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\leq 6 \\ \tfrac{1}{4}x_1 + x_2 &\leq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 22 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}\right\} \ldots \text{ Nebenbedingungen}$$

Geometrie:



Optimaler Punkt = opt. Entscheidung: $x^* = \binom{4}{5}$, d.h.
4 Gallonen Eiscreme und 5 kg Butter erzielen den max. Profit von $5 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = 40$ \$.

Matrixformulierung:

$p = \binom{5}{4}$ ... Preis/Profit-Vektor

$x = \binom{x_1}{x_2}$ ... Entscheidungsvektor

Zielfkt. $p^T x = (5,4)\binom{x_1}{x_2} = 5x_1 + 4x_2 \to \max.$

Variante über Kostenminimierung: $c = -p = \binom{-5}{-4}$ ... Kostenvektor: $c^T x = -5x_1 - 4x_2 \to \min.$

Nebenbedingungen $\quad x_1 \geq 0 \mid \cdot(-1) \qquad x_2 \geq 0 \mid \cdot(-1)$

$\qquad -x_1 \leq 0 \qquad -x_2 \leq 0$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/4 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} \leq \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 22 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b}$$

$$A \quad x \leq b$$

Matrixform:

$$\boxed{\begin{array}{l} \min c^T x \\ \text{s.t. } Ax \leq b \end{array}} \quad \text{oder} \quad \boxed{\begin{array}{l} \max p^T x \\ \text{s.t. } Ax \leq b \end{array}}$$

Def. Ein Lineares Programm (LP) ist ein Problem der Form

$$\boxed{\begin{array}{l} \min c^T x \\ \text{s.t. } Ax \leq b \end{array}}$$

Ein Vektor x heißt zulässig, wenn er die Nebenbed. erfüllt, d.h. $Ax \leq b$.

Ein zulässiger Vektor (Punkt) ist eine Lösung des LP (optimaler Punkt), wenn es keinen anderen zulässigen Punkt gibt, der einen niedrigeren Zielfunktionswert hat.

Wenn x^* eine Lösung ist, dann ist $c^T x^*$ der optimale Wert des LP.

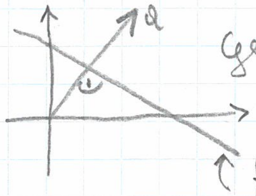
Formaler:

- optimaler Wert: $w^* = \min \{ c^T x \mid Ax \leq b \}$, kann auch $+\infty$ oder $-\infty$ sein.
- optimaler Punkt: x^* mit $Ax^* \leq b$ und $c^T x^* = w^*$
- optimale Menge: $X_{opt} = \{ x \mid Ax \leq b,\ c^T x = w^* \}$

Beispiel von oben: $\quad w^* = 40, \ x^* = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \ X_{opt} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$.

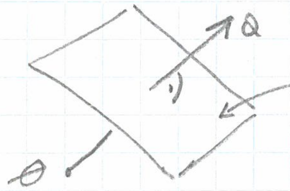
Geometrie:

▷ 1 Gleichung $\quad a^T x = b$



Gerade in $\mathbb{R}^2$

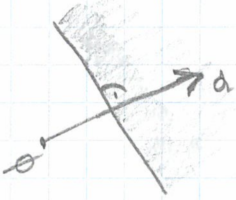
$\{x \mid a^T x = b\}$

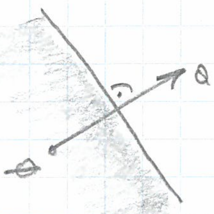


$\{x \mid a^T x = b\}$

Ebene in $\mathbb{R}^3$

▷ 1 Ungleichung $\quad a^T x \geq b$ ... Halbebene .... $a^T x \leq b$





Beachte: 1.) $a^T x = b$ ist äquivalent zu den zwei Ungleichungen $a^T x \leq b$ und $a^T x \geq b$.

2.) $a^T x \geq b \quad | \cdot (-1)$

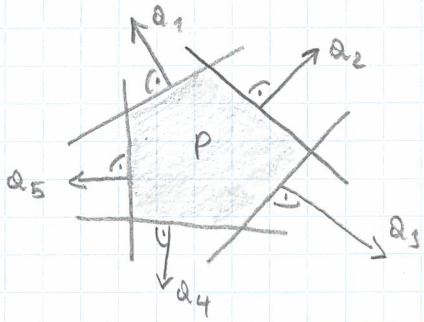
$-a^T x \leq -b$

3.) Es genügt daher, Ungleichungen vom Typ $\leq$ zu betrachten.

▷ mehrere Ungleichungen:

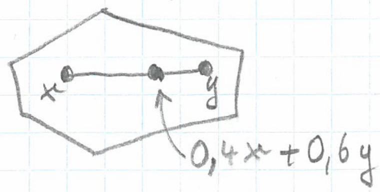
$$\left.\begin{array}{l} a_1^T x \leq b_1 \\ a_2^T x \leq b_2 \\ \quad \vdots \\ a_m^T x \leq b_m \end{array}\right\} \quad \text{in Matrixform} \quad \underset{m\times n}{A}\,\underset{n\times m}{x} \leq \underset{m\times 1}{b}$$

$Ax \leq b$ definiert ein Polyeder, also die Schnittmenge endlich vieler Halbebenen. $\quad P = \{x \mid Ax \leq b\}$, zulässiger Bereich des LP.

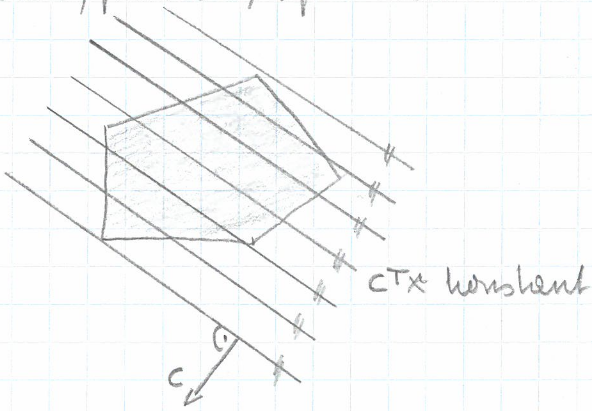


Bemerkung: Ein Polyeder ist konvex, d.h. für 2 beliebige Punkte des Polyeders liegt deren Verbindungslinie im Polyeder:

$$\forall\, x, y \in P,\ 0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow \underbrace{\lambda x + (1-\lambda) y}_{\text{konvexe Kombination von } x \text{ und } y} \in P$$

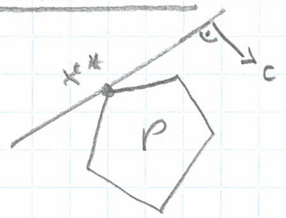


D <u>Zielfunktion</u> $c^T x$ ist eine lineare Fkt. in x und hat daher gerade, parallele, äquidistante Konturlinien.

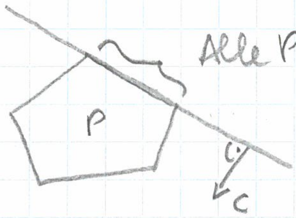


<u>Lösungsstruktur von LPs:</u>

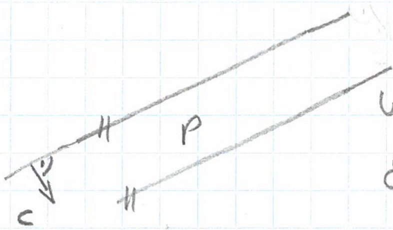
Typen:



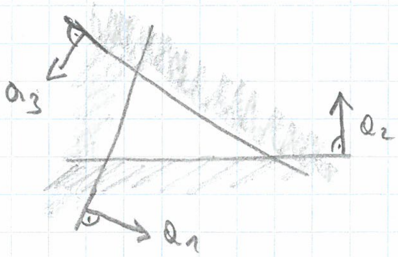
<u>Eindeutige Lösung</u> x^* an einer <u>Ecke</u> des Polyeders.



Alle Punkte auf dieser <u>Kante</u> des Polyeders sind opt. Punkte. <u>∞ Lösungen</u>, die konvexe Kombinationen von <u>opt. Eckpunkten</u> sind.



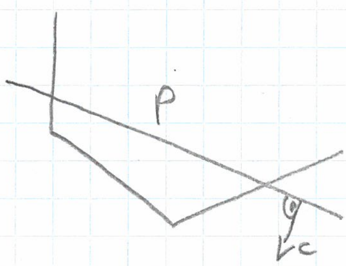
Wieder <u>∞ Lösungen</u>, aber keine opt. Eckpunkte.



$P = \{\}$ ... leere Menge.

Das LP ist <u>unzulässig</u>. Die Nebenbedingungen sind <u>inkonsistent</u>

<u>$w^* = +\infty$</u>



Das LP ist <u>unbeschränkt</u>. <u>$w^* = -\infty$</u>.

Es gibt zulässige Punkte mit beliebig kleinen Zielfktwerten.

Zusammenfassung:

- $w^* = -\infty \iff$ Das LP ist unbeschränkt, $X_{opt} = \{\}$
- $w^* = +\infty \iff P = \{\}, X_{opt} = \{\}$
- w^* ist endlich $\iff X_{opt} \neq \{\}$

Theorem: Falls das Polyeder der Nebenbedingungen mind. eine Ecke hat und w^* endlich ist, dann gibt es eine Ecke des Polyeders, die eine Lösung (= opt. Punkt) ist.

Daher könnte man 1.) alle Ecken bestimmen
2.) die Ecke(n) mit dem niedrigsten Zielfktwert ist eine Lösung

Diese Vorgehensweise ist für große LP aber nicht effizient.

Der Simplex-Algorithmus löst ein LP, indem von einer Ecke zu einer nächsten gesprungen wird, deren Zielfkt.wert niedriger ist, bis dies nicht mehr möglich ist und somit eine Lsg. gefunden wurde.