Gewöhnliche Differentialgleichungen

Papula, Band 2, IV

▷ Grundbegriffe:

Def.: Eine Gleichung, in der Ableitungen einer unbekannten Funktion $y(x)$ bis zur n-ten Ordnung auftreten, heißt eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung.

Bem. * Analog für Funktionen von mehr als einer Variablen, z. B. $u(x,y,z,t)$, mit partiellen Ableitungen: partielle Differentialgleichungen

* Abkürzung für gewöhnliche Differentialgleichung(en): DGL

Beispiele:

- $y'(x) = 2x$ explizite DGL 1. Ordg., da $y'(x) = \ldots$
- $x + y(x) \cdot y'(x) = 0$ implizite DGL 1. Ordg., da nicht die höchste Ableitung auf der linken Seite steht.

  kürzer: $x + y y' = 0$
- $y' + y y'' = 0$ implizite DGL 2. Ordg.
- $\ddot{s} = -g$ explizite DGL 2. Ordg.
- $y''' + 2y' = \cos(x)$ implizite DGL 3. Ordg.

Def.: Eine Fkt. $y(x)$ heißt Lösung einer DGL, wenn sie die DGL für alle x des Definitionsbereichs der DGL erfüllt.

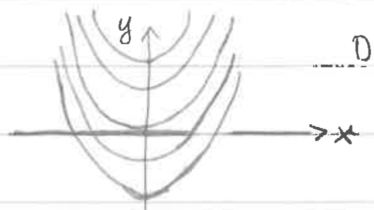
- Eine allgemeine Lösung einer DGL n-ter Ordg. enthält n unabhängige Parameter, genannt die Integrationskonstanten.
- Eine spezielle oder partikuläre Lösung wird aus der allg. Lsg. gewonnen, indem aufgrund zusätzlicher Bedingungen, z. B. Anfangsbedingungen oder Randbedingungen, die n Integrationskonstanten fixiert werden.

D. Beispiele:

- $y' = 2x$ Lösen durch unbestimmte Integration (Stammfkt. finden)

allg. Lsg. $y(x) = \int 2x \, dx = x^2 + C$ mit $C \in \mathbb{R}$ der Integrationskonstanten

Bild:



Die allg. Lsg. ist eine Schar an Parabeln.

Die zusätzliche Bedingung $y(0) = 1$ fixiert die Integr.-konstante:

$y(0) = 0^2 + C = 1 \Rightarrow C = 1$.

Zugehörige partikuläre Lösung: $y(x) = x^2 + 1$.

- Harmonische Schwingung: $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$ mit $A, \omega_0, \varphi \in \mathbb{R}$

$\dot{x}(t) = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

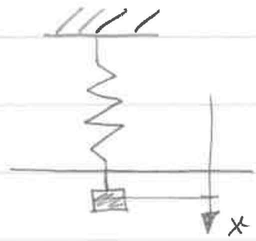
$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 A \sin(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x(t)$

Die Fkt $x(t)$ erfüllt daher die DGL $\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$

Physikalische Modellierung:

Rückstellkraft $F_1 = -c x$

Reibungskraft $F_2 = -k v$



Ruhelage bei $x = 0$

Newtons Bewegungsgesetz: $m a = F_1 + F_2$

$m \ddot{x} = -c x - k \dot{x}$

bzw. $\boxed{m \ddot{x} + k \dot{x} + c x = 0}$

Speziell für den Fall ohne Reibung ($k = 0$) gilt

$m \ddot{x} + c x = 0 \quad | : m$

$\ddot{x} + \frac{c}{m} x = 0$

vgl. $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

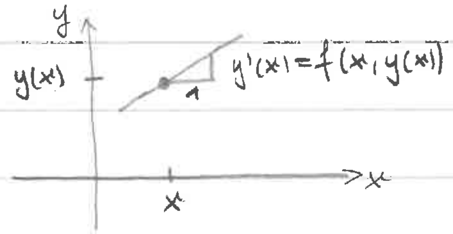
$\Rightarrow$ Allg. Lsg. $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$ mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$ und A und φ den zwei unabh. Parametern der DGL 2. Ordg.

▷ **DGL 1. Ordnung:**

- Allgemeine Form $\boxed{y'(x) = f(x, y(x))}$

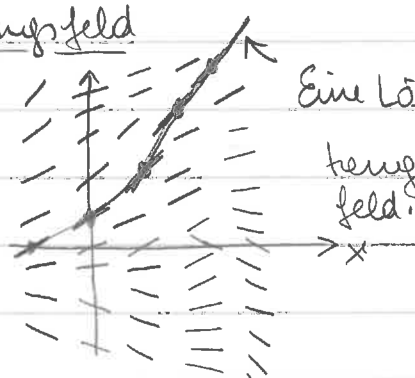
  z.B.: $y'(x) = 3y(x)$, $y'(x) = 2x$, $y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$, etc.

- Geometrie: $f(x, y(x))$ gibt die Steigung ($y'(x)$) der gesuchten Funktion am Punkt $(x, y(x))$ an.



heißt Linien- oder Richtungselement

In jedem Punkt (x,y), in dem $f(x,y)$ definiert ist kann das zugehörige Richtungselement betrachtet werden: Richtungsfeld



Eine Lösung der DGL ist überall tangential an das Richtungsfeld.

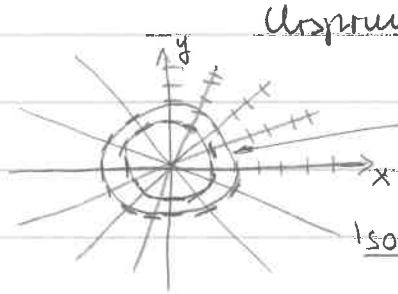
- Bsp.: $x + yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$, $f(x,y) = -\frac{x}{y}$

und Def. Die Isoklinen sind die Verbindungslinien jener Punkte der x-y-Ebene, die den gleichen $f(x,y)$ Wert also die gleiche Steigung/Richtung haben, d.h. $f(x,y) =$ konstant.

Bsp. $y' = -\frac{x}{y} = a \in \mathbb{R}$

1. Fall $a = 0$: $x = 0$, d.h. y-Achse

2. Fall $a \neq 0$: $y = -\frac{1}{a}x$, d.h. Geraden durch den Ursprung



Lösungen sind Kreise mit Ursprung als Mittelpkt.

Isoklinen

- DGL mit trennbaren Variablen:

allg. Form: $y' = f(x) \cdot g(y)$. Solche DGL heißen separabel und lassen sich mittels der Methode „Trennung der Variablen" lösen:

1.) Schreibe $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$

2.) Trennen der Variablen: $\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$

3.) Integration beider Seiten:

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx$$

4.) Auflösen des Ergebnisses nach y, falls möglich.

Beispiel: $\boxed{y' = y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y$

$$\frac{1}{y}\,dy = dx$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int dx$$

$$\ln|y| = x + C \quad , C \in \mathbb{R}$$

$$|y| = e^x \cdot e^C$$

$$y = \pm e^C \cdot e^x$$

$$y = K \cdot e^x \quad , K \neq 0$$

Weitere Lsg. ist $y = 0$. (Allg. ist das der Fall $g(y) = 0$.)

Insgesamt lautet die allg. Lsg. $y = K \cdot e^x$ mit $K \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Die Integrationskonstante kann auch in logarithmischer Form als $\ln|C|$ angesetzt werden. Im obigen Bsp. führt das zu $\ln|y| = x + \ln|C|$ mit $C \neq 0$

$$\ln|y| - \ln|C| = x$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = x$$

$$\left|\frac{y}{C}\right| = e^x$$

$$y = \pm C \cdot e^x$$

Beispiel: $\boxed{x + y y' = 0 \quad , y(0) = 2}$ ... Anfangswertproblem, da neben der DGL auch eine Anfangsbedingung gegeben ist. Die zugehörige spezielle/partikuläre Lsg. ist gesucht.

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$y\frac{dy}{dx} = -x$$
$$y\,dy = -x\,dx$$
$$\int y\,dy = \int -x\,dx$$
$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \quad |\cdot 2$$
$$\underline{x^2+y^2} = 2C$$ … Kreise mit Ursprung als Mittelpkt.

↑ allg. Lsg.

Einsetzen der Anfangsbedingung $y(0)=2$ liefert die zugehörige part. Lsg.:

$0^2 + 2^2 = 2C \Rightarrow C = 2$, $\underline{x^2+y^2=4}$ Kreis mit Radius 2.

Beispiel: $\boxed{y' + y^2 = 0}$

$$\frac{dy}{dx} = -y^2$$
$$-\frac{1}{y^2}dy = dx$$
$$\int -\frac{1}{y^2}dy = \int dx$$
$$-\frac{y^{-1}}{-1} = x + C$$
$$\frac{1}{y} = x + C$$
$$\underline{y = \frac{1}{x+C}}.$$

- Integration einer DGL durch Substitution:

- Typ $y' = f(ax+by+c)$: $u := ax+by+c$

genauer $u(x) := ax + by(x) + c$
$$u' = a + by'$$
$$y' = \frac{u'-a}{b}$$

$$\frac{u'-a}{b} = f(u)$$
$$u' = a + b\cdot f(u)$$ … kann durch Trennung d. Variablen
$$\frac{du}{dx} = a + b\cdot f(u)$$ gelöst werden
$$\frac{1}{a+b\,f(u)}\,du = dx$$

etc. $\Rightarrow u(x) \Rightarrow$ Rücksubstitution liefert $y(x)$.

• Typ $\underbrace{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$: $u = \frac{y}{x}$ d.h. $y = x \cdot u$

$y' = 1 \cdot u + x \cdot u'$

$u + x \cdot u' = f(u)$ ... ist wieder separabel

$u + x \cdot \frac{du}{dx} = f(u)$

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

etc. $\Rightarrow u(x) \Rightarrow$ Rücksubstitution liefert $y(x)$.

Beispiele:

• $y' = 2x - y$ ist vom Typ $y' = f(ax + b + c)$ mit $a = 2, b = -1, c = 0$

Substitution $u := 2x - y \quad |'$

$u' = 2 - y'$

$y' = 2 - u'$

→ Einsetzen liefert $2 - u' = u$, was sich durch Trennen der Variablen lösen läßt: $2 - \frac{du}{dx} = u$

$$-\frac{du}{dx} = u - 2$$

$$\frac{du}{u-2} = -dx \quad |\int$$

$$\ln|u-2| = -x + \ln|c| \quad , c \neq 0$$

$$\ln\left|\frac{u-2}{c}\right| = -x$$

$$\left|\frac{u-2}{c}\right| = e^{-x}$$

$$u - 2 = \pm c e^{-x}$$

$$u = 2 \pm c \cdot e^{-x} = 2 + K e^{-x}, \ K \neq 0$$

Weitere Lösung ergibt sich aus $u - 2 = 0$: Dann ist $u' = 0$ und $u = 2$ konstant. Insgesamt erhalten wir die allg. Lösung $u = 2 + Ke^{-x}$ mit $K \in \mathbb{R}$.

Rücksubstitution: $2x - y = 2 + Ke^{-x}$

$$y = 2x - 2 - Ke^{-x}, \text{ mit } K \in \mathbb{R}.$$

• $y' = \frac{x+2y}{x} = 1 + 2\left(\frac{y}{x}\right)$ ist vom Typ $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Substitution $u := \frac{y}{x}$, genauer $u(x) = \frac{y(x)}{x}$

d.h. $y = x \cdot u$

$y' = 1 \cdot u + x \cdot u'$

Einsetzen in die DGL liefert $u + x \cdot u' = 1 + 2u$

$x \cdot u' = 1 + u$ Lösen mit Trennung der Variablen

$$x \cdot \frac{du}{dx} = 1 + u$$

$$\frac{du}{1+u} = \frac{dx}{x} \quad \Big| \int$$

$$\ln|1+u| = \ln|x| + \ln|C| \quad \text{mit } C \neq 0$$

$$\ln|1+u| = \ln|Cx|$$

$1 + u = Cx$, da C pos. und neg. sein kann

$u = Cx - 1$, Für $C=0$ ist $u=-1$, und $x \cdot u' = 0$.

Denn ist $u'=0$, was konsistent ist mit $u=-1$.

Somit ist $C=0$ auch erlaubt.

Rücksubstitution: $y = x \cdot u = Cx^2 - x$ mit $C \in \mathbb{R}$.

- Lineare DGL 1. Ordnung:

Def.: Eine DGL 1. Ordnung heißt linear, wenn sie in der Form

$$y'(x) + f(x)\cdot y(x) = g(x)$$ darstellbar ist.

Ist $g(x) = 0$ für alle x, so heißt die lineare DGL homogen, ansonsten inhomogen.

Bspe. linear: $y' - x\cdot y = 0$ ... homogen

$xy' + 2y = e^x \rightarrow y' + \frac{2}{x}\cdot y = \frac{e^x}{x}$ ... inhomogen

$y' + \tan(x)\cdot y = 2\sin(x)\cos(x)$ ... inhomogen

nicht-linear: $y' + y^2 = 1$

$yy' + x = 0$

Integration der homogenen linearen DGL: durch Trennen der Variablen

$$y' + f(x)\cdot y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -f(x)\cdot y$$

$$\frac{1}{y}\,dy = -f(x)\,dx$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\int f(x)\,dx$$

$$\ln|y| = -\int f(x)\,dx + \underbrace{\ln|C|}_{\text{Integrationskonstante},\ C\neq 0}$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int f(x)\,dx$$

$$\left|\frac{y}{C}\right| = e^{-\int f(x)\,dx}$$

$$y = \pm|C|\cdot e^{-\int f(x)\,dx}$$

$$\underline{\underline{y = C\,e^{-\int f(x)\,dx}}}$$ mit $C\in\mathbb{R}$ also auch $C=0$, da auch $y(x)=0$ eine Lösung ist.

Beispiele:

(1) $x^2 y' + y = 0 \rightarrow y' + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{=f(x)} y = 0$

$$-\int f(x)\,dx = -\int x^{-2}\,dx = -\frac{x^{-1}}{-1} = \frac{1}{x}$$

Einsetzen in die Lösungsformel ergibt

$y(x) = C \cdot e^{\frac{1}{x}}$.

(2) $y' \underbrace{-2x}_{f(x)} \cdot y = 0 \Rightarrow -\int f(x)dx = +\int 2x\,dx = x^2 \Big\rangle\ y(x) = C \cdot e^{x^2}$.

Spezielle Lsg. für Anfangswert $y(0) = 5$: $5 = C \cdot e^0 = C$

$y(x) = 5 \cdot e^{x^2}$.

Integration der inhomogenen linearen DGL:

zwei Lösungsmethoden: 1.) „Variation der Konstanten"

2.) Aufsuchen einer partikulären Lsg.

ad 1.) „Variation der Konstanten":

inhomogene DGL: $y' + f(x)y = g(x)$

homogene DGL: $y' + f(x)y = 0$ hat allg. Lsg

$y(x) = K \cdot e^{-\int f(x)dx}$

Ansatz $y(x) = K(x) \cdot e^{-\int f(x)dx}$ einsetzen in die inhom. DGL:

$$K'(x) \cdot e^{-\int f(x)dx} + \underbrace{K(x) \cdot e^{-\int f(x)dx} \cdot (-f(x)) + f(x) K(x) e^{-\int f(x)dx}}_{=0} = g(x)$$

$$K'(x) \cdot e^{-\int f(x)dx} = g(x) \quad \Big| \cdot e^{+\int f(x)dx}$$

$$K'(x) = e^{\int f(x)dx} \cdot g(x)$$

$$K(x) = \int e^{\int f(x)dx} \cdot g(x) + C$$

Insgesamt:

$$y(x) = \left[\int g(x) \cdot e^{\int f(x)dx}\,dx + C\right] e^{-\int f(x)dx}.$$

Beispiele: ▶ $y' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{f(x)} y = \underbrace{\cos(x)}_{g(x)}$ mit $x \neq 0$ also $x > 0$ oder $x < 0$

$\int f(x)dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$, $e^{\int f(x)dx} = e^{\ln|x|} = |x| = \pm x$

je nachdem ob $x > 0$ oder $x < 0$:

für $x > 0$: x, für $x < 0$: $-x$.

$$\int g(x)\, \underbrace{e^{\int f(x)\,dx}}_{\pm x} dx = \int \cos(x)\cdot(\pm x)\, dx =$$

$$= \pm \int \underbrace{\cos(x)\cdot x}_{f'\cdot g}\, dx = \pm\Big[\underbrace{\sin(x)\cdot x}_{f\cdot g} - \int \underbrace{\sin(x)\cdot 1}_{f\cdot g'}\, dx\Big] =$$

$$= \pm\big[\sin(x)\cdot x + \cos(x)\big]$$

$$e^{-\int f(x)\,dx} = e^{-\ln|x|} = \frac{1}{e^{\ln|x|}} = \frac{1}{|x|} = \frac{1}{\pm x} = \pm\frac{1}{x}$$

Insgesamt: $y(x) = \Big[\pm\big[\sin(x)\cdot x + \cos(x)\big] + C\Big]\cdot\left(\pm\frac{1}{x}\right) =$

$$= \frac{\sin(x)x + \cos(x)}{x} \pm C\,\frac{1}{x} =$$

$$= \frac{\sin(x)\cdot x + \cos(x) + K}{x} \quad \text{mit } K \in \mathbb{R}.$$

▶ $y' \underbrace{-3}_{f(x)} y = \underbrace{x e^{4x}}_{g(x)}$, $\int f(x)\,dx = \int -3\,dx = -3x$

$e^{\int f(x)\,dx} = e^{-3x}$, $e^{-\int f(x)\,dx} = e^{3x}$

$$\int g(x)\, e^{\int f(x)\,dx} dx = \int x e^{4x}\cdot e^{-3x}\, dx = \int \underbrace{x\cdot e^{x}}_{f\cdot g'}\, dx =$$

$$= \underbrace{x e^{x}}_{f\cdot g} \underbrace{- \int 1\cdot e^{x}\, dx}_{-\int f'\cdot g} = x e^{x} - e^{x} = (x-1)e^{x}.$$

Insgesamt: $y(x) = \big[(x-1)e^{x} + C\big]e^{3x}$

$y(x) = (x-1)e^{4x} + C e^{3x}$ ... allg. Lsg.

spezielle Lsg. für Anfangsbedingung $y(1) = 2$:

$$2 = (1-1)\cdot e^{4} + C\cdot e^{3}$$

$$2 = C e^{3} \quad |\cdot e^{-3}$$

$$C = 2e^{-3}$$

$y(x) = (x-1)e^{4x} + 2e^{3(x-1)}$ ... spez. Lsg.

ad 2.) Aufsuchen einer partikulären Lösung: beruht auf der Tatsache, dass die allg. Lsg. $y(x)$ der inhom. linearen DGL als Summe der allg. Lsg. $y_0(x)$ der zugehörigen hom. lin. DGL und einer beliebigen partikulären Lsg. $y_p(x)$ der inhom. lin. DGL. darstellbar ist: $\underline{y(x) = y_0(x) + y_p(x)}$.

Bem.: gilt auch für lineare DGL höherer Ordnung.

<u>Beispiel</u>: $y' \underbrace{- \tan(x)}_{f(x)} \cdot y = \underbrace{2\sin(x)}_{g(x)}$ für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$$y_0(x) = C e^{-\int f(x)\,dx} = C e^{+\int \tan(x)\,dx} = C e^{-\ln|\cos(x)|}$$

$$= C \frac{1}{e^{\ln|\cos(x)|}} = C \frac{1}{|\cos(x)|} = C \cdot \frac{1}{\cos(x)}$$

mit $C \in \mathbb{R}$.

Ansatz für eine partikuläre Lösung: $y_p(x) = A\cos(x)$, da denn $\tan(x) \cdot \cos(x) = \sin(x)$. Einsetzen des Ansatzes in die inhom. lin. DGL ergibt:

$$-A\sin(x) - \tan(x) \cdot A\cos(x) = 2\sin(x)$$

$$-2A\sin(x) = 2\sin(x) \Rightarrow A = -1$$

Insgesamt: $\underline{y(x) = \frac{C}{\cos(x)} - \cos(x) \text{ mit } C \in \mathbb{R}}$.

- <u>Lineare DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:</u>
  - <u>Typ:</u> $y' + a y = g(x)$ mit $a \in \mathbb{R}$
  - <u>Allg. Lsg. der hom. linearen DGL</u>: $\underline{y_0(x) = C \cdot e^{-ax}}$, vgl. voriges Kapitel mit $f(x) = a$.
  - Lösungsansätze für eine partikuläre Lsg $y_p(x)$ der inhom. lin. DGL. finden sich in Tabelle 1 auf Seite 381 von Papula Bd. 2.
  - Formel von „Variation d. Konstanten" ist weiterhin anwendbar.

- **Anwendungsbeispiele:**

▷ Radioaktiver Zerfall: $n(t)$ ... Anzahl der zur Zeit t noch vorhandenen Atomkerne

$\dot{n} + \lambda n = 0$ mit λ ... Zerfallskonstante

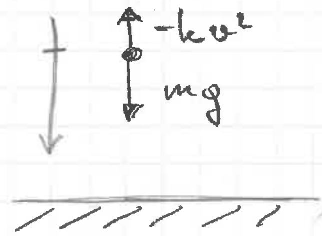
homogene lineare DGL 1. Ordnung mit allg. Lsg.

$n(t) = C \cdot e^{-\lambda t}$

Anfangsbedg. $n(0) = n_0$ liefert $n_0 = C \cdot e^0 = C$, d.h.

$n(t) = n_0 \cdot e^{-\lambda t}$.

▷ Freier Fall mit quadr. Luftwiderstand:



$ma = mg - kv^2$

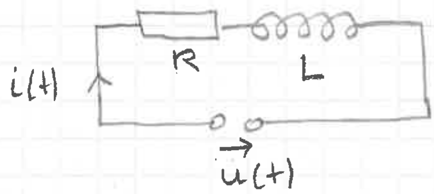
$m\dot{v} = mg - kv^2$

nicht-lineare DGL 1. Ordnung

Lösen mit Trennen der Variablen, siehe Papula:

$$v(t) = v_E \cdot \tanh\left(\frac{g}{v_E} t\right) \xrightarrow[t \to \infty]{} v_E$$

▷ RL-Wechselstromkreis:



$$L \cdot \frac{di}{dt} + Ri = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$$

inhomogene lineare DGL 1. Ordg. mit konstanten Koeffizienten

Lösen mit allg. homogene Lsg. + partikuläre Lsg., siehe Papula:

$$i(t) = i_0(t) + i_p(t)$$

$$= \underbrace{C \cdot e^{-\frac{R}{L}t}}_{\downarrow t \to \infty \; 0} + \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cdot \sin\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right).$$

D **Lineare DGL 2. Ordg. mit konstanten Koeffizienten:**

Typ: $\boxed{y'' + a y' + b y = \underbrace{g(x)}}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$

„Störfunktion", „Störglied"

Falls $g(x) = 0$ für alle $x \Rightarrow$ homogen, ansonsten inhomogen.

Eigenschaften der homogenen Glg. $y'' + a y' + b y = 0$:

\# Wenn $y_1(x)$ Lsg. $\Longrightarrow$ $C \cdot y_1(x)$ mit $C \in \mathbb{R}$ auch Lsg.

\# Wenn $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lsg. $\Rightarrow$ $C_1 y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$ mit C_1 und $C_2 \in \mathbb{R}$ wieder Lsg.

\# Wenn $u(x) + j\, v(x)$ Lsg. $\Leftrightarrow$ Realteil $u(x)$ und Imaginärteil $v(x)$ sind Lsg.

Beispiele: $y'' + \omega^2 y = 0$ ... Schwingungsgleichung

- hat Lsg. $y_1(x) = \sin(\omega x)$ und $y_2(x) = \cos(\omega x)$ und somit auch $y(x) = C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x)$
- komplexwertige Lsg. $y(x) = e^{j\omega x} = \cos(\omega x) + j \sin(\omega x)$

Frage: Wann sind C_1 und C_2 aus Anfangsbedingungen $y(0) = A$ und $y'(0) = B$ eindeutig bestimmbar?

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \rightarrow C_1 y_1(0) + C_2 y_2(0) = A$$

$$y'(x) = C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x) \rightarrow C_1 y_1'(0) + C_2 y_2'(0) = B$$

$$\begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

eindeutig lösbar, wenn

$$\underbrace{\det \begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{pmatrix}}_{\text{„Wronski-Determinante" } W(y_1, y_2)} \neq 0$$

Dann heißen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Basislösungen oder Basisfunktionen oder Fundamentallösungen.

<u>Bsp.:</u> $y_1(x) = \sin(\omega x)$, $y_2(x) = \cos(\omega x)$

$$W(y_1, y_2) = \det \begin{pmatrix} \sin(\omega x) & \cos(\omega x) \\ \cos(\omega x)\cdot\omega & -\sin(\omega x)\cdot\omega \end{pmatrix} =$$

$$= -\sin^2(\omega x)\,\omega - \cos^2(\omega x)\cdot\omega =$$

$$= -\omega\,\underbrace{\left[\sin^2(\omega x) + \cos^2(\omega x)\right]}_{=1} = -\omega \neq 0$$

Die <u>allg. Lösung</u> $y(x)$ der homogenen linearen DGL $y'' + a y' + b y = 0$ ist als Linearkombination zweier <u>Basislösungen</u> darstellbar $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

- <u>Integration der homogenen linearen DGL $y'' + ay' + by = 0$:</u>

mit dem **Ansatz** $y(x) = e^{\lambda x}$:

$$\left.\begin{aligned} y(x) &= e^{\lambda x} \\ y'(x) &= \lambda\cdot e^{\lambda x} \\ y''(x) &= \lambda^2\cdot e^{\lambda x} \end{aligned}\right\}$$

Einsetzen in die DGL:

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)\,e^{\lambda x} = 0 \quad | \cdot e^{-\lambda x}$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad \text{... quadr. Glg.}$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

$$= -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Die <u>Diskriminante</u> $D := a^2 - 4b$ entscheidet über die Art der Lösungen:

- <u>1. Fall $D > 0$:</u> zwei reelle unterschiedliche Lösungen λ_1 und λ_2.

$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ und $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ sind <u>Basislösungen</u>, die die Wronski-Determinante $\underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0}\,\underbrace{e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x}}_{\neq 0} \neq 0$ ergibt.

Die allg. Lsg. der DGL lautet:

$$y(x) = C_1\cdot e^{\lambda_1 x} + C_2\cdot e^{\lambda_2 x} \text{ mit } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

- **2. Fall $D = 0$:** $a^2 - 4b = 0$, doppelte Nullstelle $\lambda = -\frac{a}{2}$

  ergibt zuerst nur eine Lsg. der DGL: $y_1(x) = e^{\lambda x}$.

  Mit dem Ansatz „Variation der Konstanten" $y_2(x) = C(x) e^{\lambda x}$

  lässt sich eine zweite Lsg. finden: $y_2(x) = x \cdot e^{\lambda x}$.

  $y_1(x)$ und $y_2(x)$ sind wieder Basislösungen, und die allg. Lsg.

  der DGL lautet $y(x) = C_1 \cdot e^{\lambda x} + C_2 \cdot x e^{\lambda x}$ mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

- **3. Fall $D < 0$:** $a^2 - 4b < 0$, zwei konjugiert komplexe Lsg.

  $$\lambda_{1,2} = \underbrace{-\frac{a}{2}}_{=:\alpha} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\underbrace{a^2-4b}_{=:-4\omega^2}} = \alpha \pm j\omega$$

  komplexe Basislösungen: $y_1(x) = e^{(\alpha + j\omega)x} = e^{\alpha x}[\cos(\omega x) + j \sin(\omega x)]$

  $y_2(x) = e^{(\alpha - j\omega)x} = e^{\alpha x}[\cos(\omega x) - j\sin(\omega x)]$

  ↓ Realteil und Imaginärteil sind wieder Lsg. der DGL

  reelle Basislösungen: $y_1(x) = e^{\alpha x} \cdot \sin(\omega x)$

  $y_2(x) = e^{\alpha x} \cdot \cos(\omega x)$

  Allg. reelle Lsg. der DGL:

  $$y(x) = e^{\alpha x} \left[C_1 \cdot \sin(\omega x) + C_2 \cdot \cos(\omega x) \right] \text{ mit } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

- Integration der inhomogenen linearen DGL $y''(x) + a y'(x) + b y(x) = g(x)$:

  1.) Bestimme die allg. Lsg. $y_0(x)$ der zugehörigen homogenen DGL $y'' + ay' + by = 0$.

  2.) Verwende den Lösungsansatz aus Tabelle 2 (Papula, Bd. 2, IV, 3, Seite 408 f.), um eine partikuläre Lsg. $y_p(x)$ der inhomogenen DGL zu finden.

  3.) Die allg. Lsg. der inhom. DGL ist $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$.

Bsp.: Papula, Bd. 2, IV, 3., S. 410 ff.:

$$y'' + 10y' - 24y = 12x^2 + 14x + 1$$

- homogene DGL: $y'' + 10y' - 24y = 0$ mit Ansatz $e^{\lambda x}$

$$\lambda^2 + 10\lambda - 24 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25+24} = -5 \pm 7 \quad \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -12 \end{cases}$$

allg. Lsg. $\underline{y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-12x}}$.

- partikuläre Lsg. der inhomogenen DGL: siehe Tabelle 2

Ansatz $y_p = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ mit $a_i \in \mathbb{R}$

$$y_p' = 2a_2 x + a_1$$

$$y_p'' = 2a_2$$

Einsetzen in die inhom. DGL:

$$2a_2 + 10(2a_2 x + a_1) - 24(a_2 x^2 + a_1 x + a_0) = 12x^2 + 14x + 1$$

$$-24a_2 x^2 + (20a_2 - 24a_1)x + (2a_2 + 10a_1 - 24a_0) =$$
$$= 12x^2 + 14x + 1$$

Koeffizientenvergleich der Polynome:

$-24a_2 = 12 \quad \Rightarrow \underline{a_2 = -\frac{1}{2}}$

$20a_2 - 24a_1 = 14 \quad \Rightarrow -10 - 24a_1 = 14$

$2a_2 + 10a_1 - 24a_0 = 1 \quad\quad -24a_1 = 24, \underline{a_1 = -1}$

$-1 - 10 - 24a_0 = 1$

$-24a_0 = 12, \underline{a_0 = -\frac{1}{2}}$

$$\underline{y_p = -\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}}$$

- Allg. Lsg. der inhom. DGL $\underline{\underline{y(x)}} = y_0(x) + y_p(x) =$

$$= \underline{\underline{C_1 e^{2x} + C_2 e^{-12x} - \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}}} \text{ mit } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$