Integralrechnung

Papula, Band 1, V

D Abschnitte 1–7: Umkehrung der Differentiation, Flächenberechnung und der Fundamentalsatz der Diff.- und Int.-rechnung, elementare Integrationsregeln

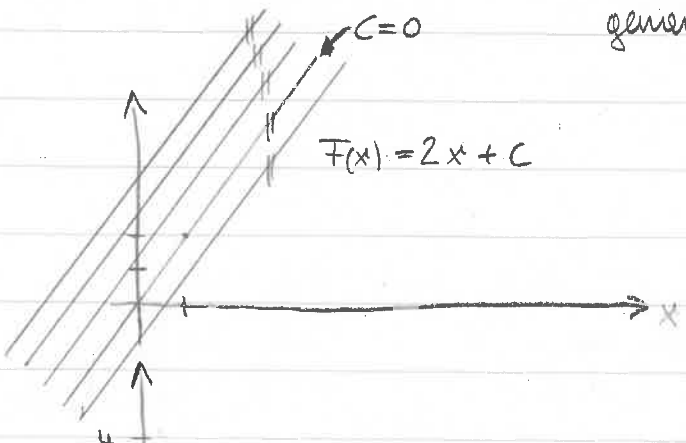
Differentiation: $f(x) \longrightarrow f'(x)$ — $f(x)$ gegeben, $f'(x)$ gesucht — eindeutig, "einfach"

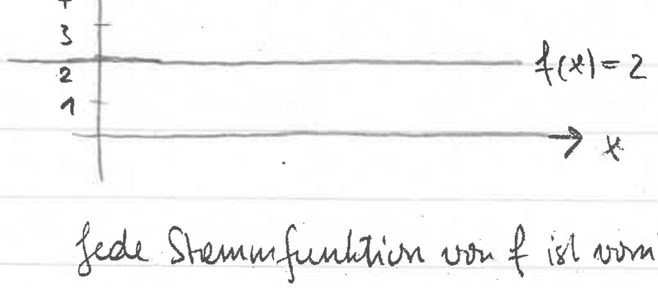
(unbestimmte) Integration, Stammfunktion berechnen: $F(x) \longleftarrow f(x)$ — $F(x)$ gesucht, $f(x)$ gegeben — mehrdeutig, „schwierig"

mit $F'(x) = f(x)$

F ist eine Stammfunktion von f

Beispiel: $f(x) = 2$, $F(x) = 2x + C$ mit C einer beliebigen Zahl genannt Integrationskonstante





Jede Stammfunktion von f ist vom Typ $F(x) = 2x + C$.

Satz: Stammfunktionen einer geg. Fkt. f unterscheiden sich durch additive Konstanten (= Integrationskonstanten)

Beweis: Sei $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$, dann gilt

$$F_1'(x) - F_2'(x) = 0$$

$$[F_1(x) - F_2(x)]' = 0$$

$$F_1(x) - F_2(x) = C \in \mathbb{R}$$

$$F_1(x) = F_2(x) + C$$

Schreibweise: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

Menge aller unbestimmten Integrale,

d.h. Stammfunktionen von $f(x)$.

Beispiele: siehe z.B. Papula Bd. 1, V, 5, Tabelle 1, S. 445

$$\int 0\,dx = C, \quad \int 1\,dx = x + C, \quad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ für } n \neq -1,$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C, \quad \int e^x\,dx = e^x + C, \quad \int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C,$$

$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \tan(x) + C, \text{ etc.}$$

Anwendungen:

- Gegeben das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz $v(t) = at + v_0$.

  Wie lauten die zugehörigen Weg-Zeit-Gesetze $s(t) = ?$.

  $s(t)$ muß eine Stammfkt. von $v(t)$ sein, d.h.

  $s(t) = \int v(t)\,dt = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + C$

  Bedeutung von C hier:

  $s(0) = 0 + 0 + C$ ... Anfangsort, oft s_0 geschrieben.

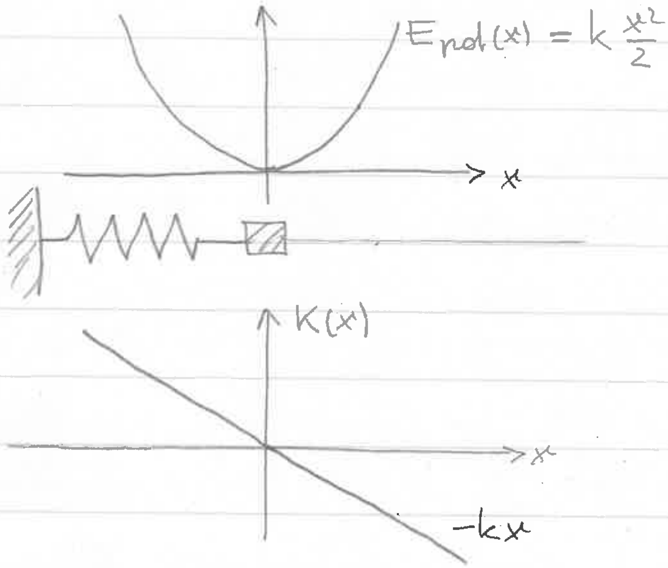
  $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Anfangsgeschw.}}}{v_0} + s_0$

- <u>potentielle Energie / Potential zur Hookschen Federkraft</u>

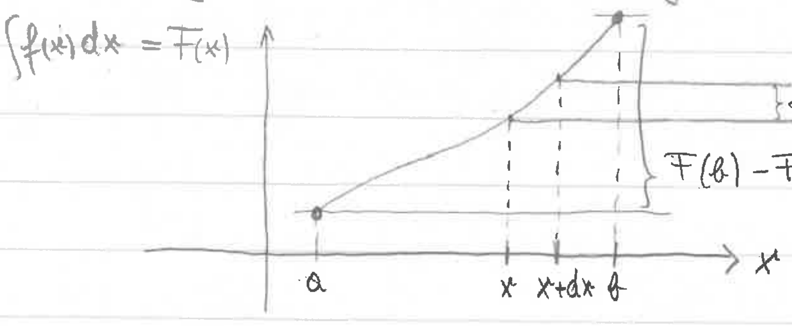
Gegeben die lineare Rückstellkraft einer Feder: $\underset{\text{Kraft}}{K(x)} = -\underset{\text{Federkonst.}}{k}x$
mit x der Auslenkung aus der Ruhelage.
Eine potentielle Energie zur Kraft ist definiert als eine negative Stammfunktion der Kraft:

$$E_{pot}(x) := -\int K(x)\,dx = \int kx\,dx = k\frac{x^2}{2} + C$$

Typischerweise verwendet man $C=0$.



<u>Zusammenhang mit der Flächenberechnung</u>



$dF = f(x)\,dx$

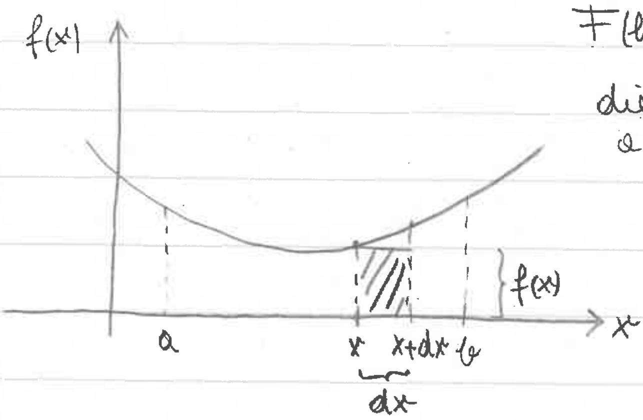
$\leftarrow \Delta F \simeq dF$

$F(b) - F(a) = \sum \Delta F \simeq \sum dF$

wird im Grenzwert $dx \to 0$ zu

$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$

die Fläche unter $f(x)$ zw. a und b.



$dF = f(x)\,dx$ ... Flächenstück

Fundamentalsatz der Diff.- und Int.-Rechnung:

- Die Fläche unter dem Graphen von $f(x)$ zwischen den Integrationsgrenzen a und b lässt sich mittels einer Stammfunktion berechnen als

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{bestimmtes Integral von } f(x) \text{ zw. } a \text{ und } b.} = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

- Die Ableitung eines best. Integrals nach der oberen Grenze ergibt den Integranden an der oberen Grenze:

$$\left[\int_a^x f(t)\,dt\right]' = \left[F(x) - F(a)\right]' = F'(x) = f(x)$$

t … Dummy-Integrationsvariable

Elementare Integrationsregeln:

$$\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$$ mit $k \in \mathbb{R}$, gilt auch mit Grenzen

$$\int \left[f(x) + g(x)\right] dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$, gilt auch mit Grenzen

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Integrationsmethoden

Repula Bd. 1, V, 8

D. Substitution

• **Bsp.:** $\int x \cdot \cos(x^2)\, dx = \otimes$

proportional zur Ableitung von : Ersetze (substituiere) x^2 durch eine neue Größe, z.B. u: $u(x) = x^2$

Denn gilt: $\underbrace{du = 2x\, dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du}$

Ersetze damit das Integral zu

$$\otimes = \int x \cdot \cos(u) \frac{1}{2x}\, du = \frac{1}{2} \int \cos(u)\, du =$$

Dieses Integral lässt sich einfach lösen zu

$$= \frac{1}{2} \sin(u) + C =$$

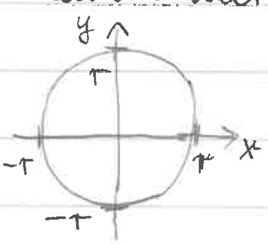
Die Rücksubstitution ergibt

$$= \frac{1}{2} \sin(x^2) + C$$

Probe: $\left[\frac{1}{2}\sin(x^2) + C\right]' = \frac{1}{2}\cos(x^2) \cdot 2x + 0$

$= x \cdot \cos(x^2)$. ✓

• **Bsp.:** Flächeninhalt eines Kreises vom Radius r:

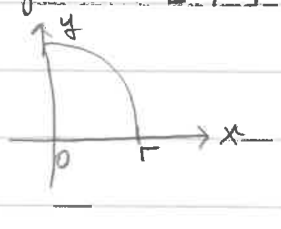


Kreisgleichung $x^2 + y^2 = r^2$ auflösen nach y: $y^2 = r^2 - x^2$

$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$

Wir betrachten nur die Viertelkreisfläche im 1. Quadranten:

$y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ für $x \in [0, r]$



Gesamte Kreisfläche $A = 4\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx$. Substitution $x = r\cdot\sin(u)$ führt zu $dx = r\cos(u)\,du$, und das Integral wird zu

$$A = 4\int_{\dots}^{\dots} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2(u)}\; r\cdot\cos(u)\,du,$$

wobei für die Grenzen zwei Vorgehensweisen alternativ möglich sind: (a) Grenzen mitsubstituieren:

$x = 0$: $\quad 0 = r\cdot\sin(u) \Rightarrow u = 0$

$x = r$: $\quad r = r\cdot\sin(u)$

$\quad 1 = \sin(u) \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}$

(b) unbestimmt integrieren, Rücksubstitution des Ergebnisses, Einsetzen der x-Grenzen

Hier verfolgen wir Variante (a):

$$A = 4\int_0^{\pi/2} \underbrace{\sqrt{r^2\underbrace{(1-\sin^2(u))}_{\cos^2(u)}}}_{r\cdot\cos(u)\text{, weil } \cos(u) \text{ im Bereich } [0,\frac{\pi}{2}] \text{ positiv ist}}\; r\cos(u)\,du$$

$$A = 4\int_0^{\pi/2} r^2\cos^2(u)\,du = 4r^2\int_0^{\pi/2}\cos^2(u)\,du$$

Formelsammlung: $\cos^2(u) = \frac{1}{2}(1+\cos(2u))$.

$$A = 4r^2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1+\cos(2u))\,du =$$

$$= \underbrace{2r^2\int_0^{\pi/2} du}_{\mathrm{I}} + \underbrace{2r^2\int_0^{\pi/2}\cos(2u)\,du}_{\mathrm{II}}$$

$$\mathrm{I} = 2r^2 u\Big|_{u=0}^{u=\pi/2} = 2r^2\frac{\pi}{2} = \underline{\pi r^2}$$

$$\mathrm{II}: \; v = 2u,\; dv = 2du: \quad 2r^2\int_0^{\pi}\cos(v)\,\frac{dv}{2} =$$

$$= r^2\int_0^{\pi}\cos(v)\,dv = r^2\sin(v)\Big|_{v=0}^{v=\pi} = \underline{0}$$

Endergebnis: $\underline{\underline{A = \pi r^2}}$

• Übersicht über Typen von Substitutionen: Papula Bd. 1, V, 8
Seite 456, Tabelle 2

Häufiger, einfacher Fall: $\int f(ax+b)\,dx$ mit $a,b \in \mathbb{R}$

$$u = ax+b$$
$$du = a\,dx$$

$$\int f(ax+b)\,dx = \int f(u)\,\frac{du}{a} = \frac{1}{a}F(u) = \frac{1}{a}F(ax+b)$$

Probe: $\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]' = \frac{1}{a}F'(ax+b)\cdot a = F'(ax+b) = f(ax+b)$ ✓

Bsp: $\int \cos(\omega t+\varphi)\,dt = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t+\varphi) + C$

IV Partielle Integration:

Produktregel der Differentialrechnung:

$$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Umordnen liefert

$$f'(x)\cdot g(x) = [f(x)\cdot g(x)]' - f(x)\cdot g'(x) \quad \Big| \int \ldots dx$$

$$\boxed{\int f'(x)\cdot g(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,dx}$$

mit Grenzen:

$$\int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx = \Big[f(x)\cdot g(x)\Big]\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx$$

Bsp. $\underbrace{\int x\cdot e^x\,dx}_{f\cdot g'} = \underbrace{x e^x - \int 1\cdot e^x\,dx}_{f\cdot g - \int f'\cdot g} = x e^x - e^x + C = \underline{(x-1)e^x + C}$.

$$\int \ln x\,dx = \underbrace{\int \ln x\cdot 1\,dx}_{f\cdot g'} = \underbrace{\ln(x)\cdot x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx}_{f\cdot g - \int f'\cdot g}$$

$$= x\cdot \ln x - x + C$$

$$= \underline{x\cdot(\ln(x)-1) + C}.$$

D *Integration echt gebrochenrationaler Funktionen durch Partialbruchzerlegung (PBZ) des Integranden:*

Bsp. $$\int \underbrace{\frac{2x^3-14x^2+14x+30}{x^2-4}}_{\text{Integrand ist nicht echt gebrochenrational, da Grad des Zählers nicht kleiner als der Grad des Nenners}} dx = \otimes$$

1.) Polynomdivision

$$\begin{array}{l}
(2x^3-14x^2+14x+30):(x^2-4) = 2x - 14 \\
-(2x^3 \qquad\qquad -8x) \\
\qquad\quad -14x^2 + 22x \\
\qquad -(14x^2 \qquad\quad +56) \\
\qquad\qquad\qquad 22x - 26
\end{array}$$

2.) $$\otimes = \int 2x - 14 + \frac{22x-26}{x^2-4}\, dx =$$

$$= \underbrace{\int 2x - 14\, dx}_{x^2-14x} + \underbrace{\int \frac{22x-26}{x^2-4}\, dx}_{\text{via PBZ}}$$

3.) PBZ: Nullstellen des Nenners $x^2-4=0$

$x_1 = 2,\ x_2 = -2$

Zerlegung in Partialbrüche

$x_1 = 2$ (einfach): $\frac{A}{x-2}$

$x_2 = -2$ (einfach): $\frac{B}{x+2}$

$$\frac{22x-26}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} \quad \Big| \cdot \text{Hauptnenner}$$

$2x - 26 = A(x+2) + B(x-2)$ gilt für alle x, insbesondere für $x = x_1$ und $x = x_2$.

$x = x_1 = 2: \quad 22 \cdot 2 - 26 = A \cdot 4 + B \cdot 0$

$\qquad\qquad 18 = 4A \Rightarrow \underline{A = 4{,}5}$

$x = x_2 = -2: \quad 22 \cdot (-2) - 26 = A \cdot 0 + B \cdot (-4)$

$\qquad\qquad -70 = -4B \Rightarrow \underline{B = 17{,}5}$

$$\int \frac{22x - 26}{x^2 - 4}\, dx = \int \frac{4{,}5}{x-2}\, dx + \int \frac{17{,}5}{x+2}\, dx =$$

$$= \underline{4{,}5 \ln|x-2| + 17{,}5 \ln|x+2|}.$$

4.) Gesamtresultat: $\underline{\underline{x^2 - 14x + 4{,}5 \ln|x-2| + 17{,}5 \ln|x+2|}}$.

<u>Allgemeine Vorgehensweise</u> der PBZ mit rein reellen Nullstellen:

x_1 einfache Nullstelle: $\dfrac{A}{x - x_1}$

x_1 zweifache Nullstelle: $\dfrac{A_1}{x - x_1} + \dfrac{A_2}{(x_1 - x_2)^2}$

$\vdots$

x_1 r-fache Nullstelle: $\dfrac{A_1}{x - x_1} + \dfrac{A_2}{(x - x_1)^2} + \ldots + \dfrac{A_r}{(x - x_1)^r}$

Zur Bestimmung der Konstanten können nach der Multiplikation mit dem Hauptnenner beliebige x-Werte, z.B. die Nullstellen, eingesetzt werden. Man erhält ein lineares Gleichungssystem für die Konstanten. Alternativ zum Einsetzen: Koeffizientenvergleich der Polynome.

<u>Bsp.</u> Integration bei 3-facher Nullstelle x_1

$$\int \frac{A_1}{x - x_1}\, dx = A_1 \ln|x - x_1| + C$$

$$\int \frac{A_2}{(x - x_1)^2}\, dx = A_2 \cdot \frac{(x - x_1)^{-2+1}}{-2+1} = \frac{-A_2}{(x - x_1)} + C$$

$$\int \frac{A_3}{(x - x_1)^3}\, dx = A_3 \cdot \frac{(x - x_1)^{-3+1}}{-3+1} = \frac{-A_3}{2 \cdot (x - x_1)^2} + C$$

Uneigentliche Integrale

Papula Bd. 1, V, 9

▷ Unendliches Integrationsintervall

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{\lambda \to \infty} \int_a^{\lambda} f(x)\,dx$$

Bsp.: Arbeit an einer Masse m im Gravitationsfeld einer Masse M

$$W = \int_{r_0}^{\infty} \gamma \frac{mM}{r^2}\,dr = \gamma m M \int_{r_0}^{\infty} r^{-2}\,dr = \lim_{\lambda \to \infty} \gamma m M \int_{r_0}^{\lambda} r^{-2}\,dr$$

$$= \lim_{\lambda \to \infty} \gamma m M \left. \frac{r^{-1}}{-1} \right|_{r_0}^{\lambda}$$

$$= \lim_{\lambda \to \infty} \gamma m M \left[\underbrace{-\frac{1}{\lambda}}_{\to 0} + \frac{1}{r_0} \right] = \gamma m M \cdot \frac{1}{r_0} = \underline{\underline{\frac{\gamma m M}{r_0}}}$$

Bsp.
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2 \lim_{\lambda \to \infty} \int_0^{\lambda} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

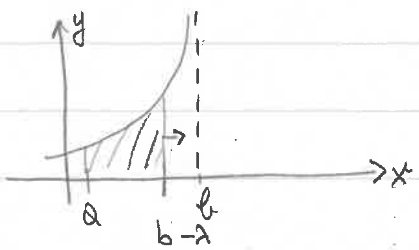
$$= 2 \lim_{\lambda \to \infty} \arctan(x) \Big|_0^{\lambda} = 2 \cdot \lim_{\lambda \to \infty} [\arctan(\lambda) - \arctan(0)]$$

$$= 2 \lim_{\lambda \to \infty} \arctan(\lambda) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\pi}}$$

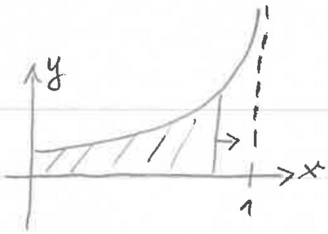
▷ Integrand mit Unendlichkeitsstelle (Pol)

Mit Pol bei $x = b$:

$$\int_a^{b} f(x)\,dx = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}} \int_a^{b-\lambda} f(x)\,dx$$



Bsp. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \otimes$



$$\otimes = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \int_0^{1-\lambda} (1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= \text{"} \quad (1-x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{-1}{1/2}\Big|_0^{1-\lambda} =$$

$$= \text{"} \quad -2\sqrt{1-x}\,\Big|_0^{1-\lambda} =$$

$$= \text{"} \quad -2\sqrt{\lambda} + 2\sqrt{1}$$

$$= \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} 2(1-\sqrt{\lambda}) = \underline{\underline{2}}$$

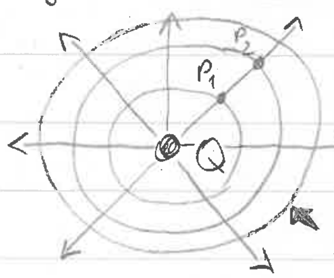
Bsp.: $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \int_\lambda^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\text{"}} \ln|x|\,\Big|_\lambda^1 =$

$$= \lim_{\text{"}} \underbrace{\ln(1)}_{=0} - \ln(\lambda) = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} \underbrace{-\ln(\lambda)}_{\to -\infty} = \underline{\underline{+\infty}}$$

Anwendungen der Integralrechnung

Papula Bd. 1, V, 10

▷ Physik und Technik: Bsp.: Spannung zw. zwei Punkten eines elektrischen Feldes



Feld-linien

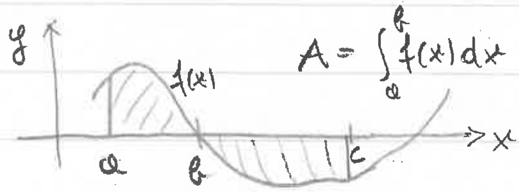
Äquipotentiel-flächen

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Spannung zw. P_1 und P_2 $= U_{12} = \int_{r_1}^{r_2} E(r)\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} r^{-2}\,dr =$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left.\frac{r^{-1}}{-1}\right|_{r_1}^{r_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

▷ Flächen:

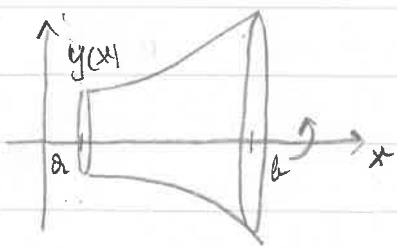


$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$$

$$A = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx$$

▷ Rotationsvolumen:

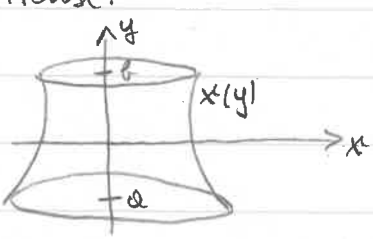
• um x-Achse:



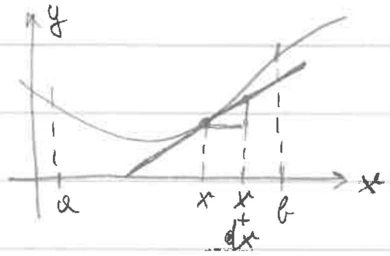
$$V = \int_{x=a}^{x=b} \pi \cdot y(x)^2\,dx$$

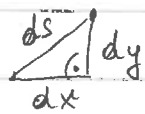
• analog um y-Achse:

$$V = \int_{y=a}^{y=b} \pi \cdot x(y)^2\,dy$$



▷ Bogenlänge:



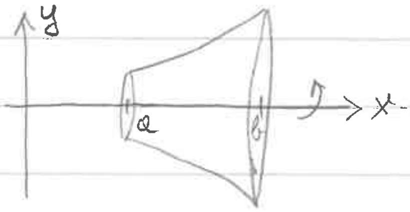


$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 =$

$$= (dx)^2 + (y'(x)\,dx)^2 = \left[1 + y'(x)^2\right](dx)^2$$

Bogenlänge $s = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx$.

▷ Mantelfläche eines Rotationskörpers:

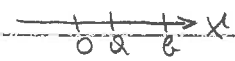


ähnliche Argumentation führt zur Formel

$$M_x = \int_a^b 2\pi\, y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx.$$

Rotation um die y-Achse $M_y = \int_c^d 2\pi\, x(y) \sqrt{1 + x'(y)^2}\,dy$.

▷ Arbeits- und Energiegrößen: x… Ort, 1-dim



$F(x)$… Kraft am Ort x

- Die von F verrichtete Arbeit entlang des Weges von a nach b:

$$W = \int dW = \int_a^b F(x)\,dx.$$

- Potentielle Energie: bereits am Bsp. der Hookschen Feder gemacht
- Arbeit im Gravitationsfeld der Erde: bereits gemacht
- Arbeit eines Gases: siehe Papula Bd. 1, V, 10.6

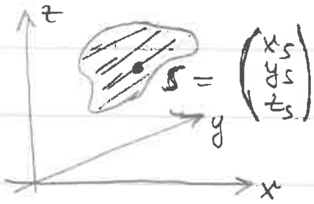
▷ Lineare und quadratische Mittelwerte:

linearer Mittelwert $\bar{y}_{linear} := \frac{1}{b-a} \int_a^b y(x)\,dx$

quadratischer Mittelwert $\bar{y}_{quad.} = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b y(x)^2\,dx}$

Anwendungen in der Elektrotechnik: siehe Papula Bd. 1, V, 10.7
- durchschnittliche Leistung eines sinusförmigen Wechselstroms
- Effektivwerte von Strom und Spannung

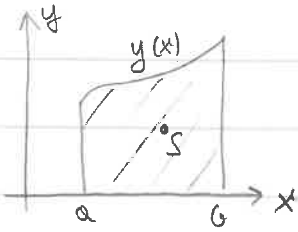
▷ Schwerpunkte homogener Flächen und Körper



$$x_S = \frac{1}{V}\int x\,dV$$
$$y_S = \frac{1}{V}\int y\,dV$$
$$z_S = \frac{1}{V}\int z\,dV$$

$$x_s = \frac{1}{A}\int x\,dA$$
$$y_s = \frac{1}{A}\int y\,dA$$

Bsp.:



$$A = \int_a^b y(x)\,dx$$

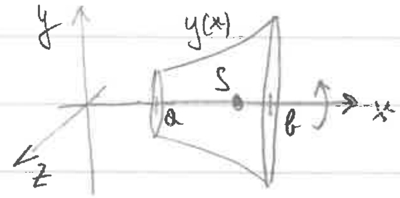
$$\underline{\underline{x_s}} = \frac{1}{A}\int x\,dA = \frac{1}{A}\int_{x=a}^{b}\int_{y=0}^{y(x)} x\,\underbrace{dy\,dx}_{=dA}$$

$$= \frac{1}{A}\int_{x=a}^{b} x\,\underbrace{\left[\int_{y=0}^{y(x)} dy\right]}_{y\big|_0^{y(x)} = y(x) - 0 = y(x)} dx = \underline{\underline{\frac{1}{A}\int_{x=a}^{b} x\,y(x)\,dx}}.$$

$$y_s = \frac{1}{A}\int y\,dA = \frac{1}{A}\int_{x=a}^{b}\left[\int_{y=0}^{y(x)} y\,dy\right]dx =$$

$$= \frac{1}{A}\int_{x=a}^{b} \frac{y^2}{2}\bigg|_{y=0}^{y=y(x)} dx = \underline{\underline{\frac{1}{2A}\int_{x=a}^{b} y(x)^2\,dx}}.$$

Bsp.: homogener Rotationskörper

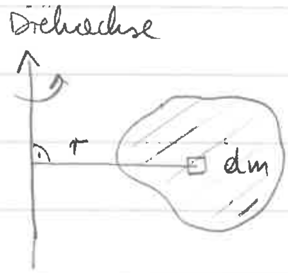


$$S = \begin{pmatrix} x_S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V = \int_{x=a}^{x=b} \underbrace{\pi \cdot y(x)^2 \, dx}_{dV}$$

$$\underline{\underline{x_S}} = \frac{1}{V} \int x \, dV = \frac{1}{V} \int_{x=a}^{b} x \cdot \pi \cdot y(x)^2 \, dx$$

$$\underline{\underline{= \frac{\pi}{V} \int_{x=a}^{b} x \cdot y(x)^2 \, dx .}}$$

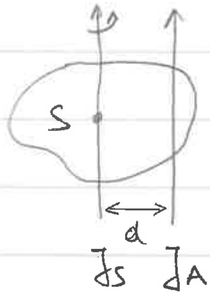
▷ <u>Massenträgheitsmomente</u>



$$\underline{J} = \int dJ = \int r^2 \, dm =$$

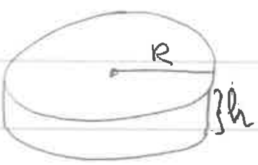
$$\underline{\underline{= \rho \int r^2 \, dV .}}$$

<u>Satz von Steiner:</u>

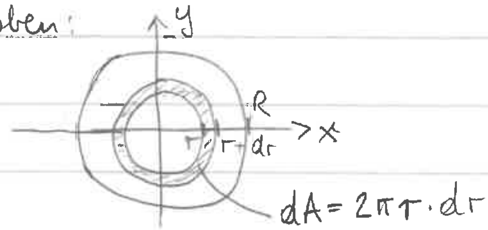


$$\underline{\underline{J_A = J_S + m d^2 .}}$$

<u>Bsp.:</u> <u>homogene</u> <u>Kreisscheibe vom Radius R und der Dicke h</u>



von oben:

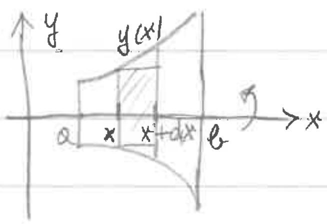


$$dm = \rho \, dV = \rho \cdot dA \cdot h = 2\pi \rho h r \, dr$$

$$r^2 dm = 2\pi \rho h r^3 dr$$

$$\underline{\underline{J}} = \int_0^R r^2 dm = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 dr = 2\pi \rho h \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} \big(\underbrace{\rho \pi R^2 h}_{m} \big) R^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2} m R^2 .}}$$

Bsp.: homogener Rotationskörper



$$J = \int_a^b dJ$$

$$dJ = \frac{1}{2}\,\underbrace{dm}_{=\rho\, dV = \rho\, \pi\, y(x)^2 dx} \cdot y(x)^2$$

$$dJ = \frac{1}{2}\pi\rho\, y(x)^4\, dx$$

$$\underline{\underline{J}} = \int_{x=a}^{b} dJ = \underline{\underline{\frac{1}{2}\pi\rho \int_{x=a}^{b} y(x)^4 dx}}.$$

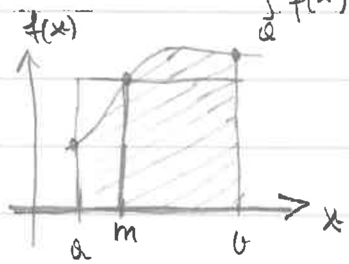
Ergänzungen zur Integralrechnung

▷ Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existiert ein $m \in [a,b]$, so dass

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(m)\cdot(b-a).$$

Bild:

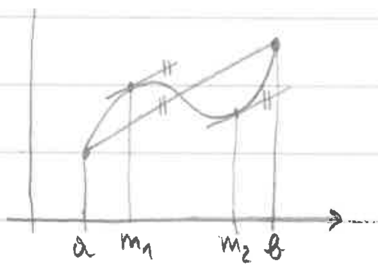


▷ Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und differenzierbar. Dann gibt es ein $m \in [a,b]$, so dass

$$f'(m) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Bild:



▷ Fourier-Reihen: Im Detail siehe Papula Bd. 2, II, hier nur als Integrationsbeispiel. Wir berechnen das Integral

$$\int_0^{2\pi} \sin(8x)\cdot\sin(3x)\,dx = \otimes$$

Dazu verwenden wir die Formel $\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$

$$\otimes = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(5x) - \cos(11x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(5x)}{5} - \frac{\sin(11x)}{11}\right]\Bigg|_0^{2\pi} = \underline{\underline{0}}$$

Jetzt berechnen wir mit Hilfe derselben Formel

$$\int_0^{2\pi} \sin(3x)\cdot\sin(3x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(0)\,dx - \cos(6x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1\,dx - \frac{1}{2}\,\frac{\sin(6x)}{6}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}x\Big|_0^{2\pi} - 0 = \frac{1}{2}(2\pi - 0) = \underline{\underline{\pi}}$$

Auf ähnliche Weise lassen sich folgende Resultate allgemein berechnen:

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cdot\cos(mx)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ \pi & \text{für } n = m \end{cases},$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\,dx = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \sin(nx)\cdot\cos(mx)\,dx = 0 \quad \text{für alle } n, m,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx)\,dx = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \sin(nx)\cdot\sin(mx)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ \pi & \text{für } n = m \end{cases}$$

Dabei können n und m jeweils die Werte $1, 2, 3, \dots$ annehmen.

<u>Anwendung:</u> Sei $f(x)$ eine periodische Funktion mit Periode 2π, d.h. $f(x+2\pi) = f(x)$ für alle x. Dann kann man $f(x)$ unter bestimmten (aber recht allgemeinen) Voraussetzungen in eine sogenannte Fourier-Reihe zerlegen:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right].$$

Die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \dots$ und $b_1, b_2, \dots$ lassen sich mit den obigen Integralen berechnen, z.B.:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)\right] \quad \Big| \cdot \cos(mx),\ \int_0^{2\pi} \dots dx$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(mx)\,dx = \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(mx)\,dx}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{a_n \underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(nx)\cos(mx)\,dx}_{\substack{\pi \text{ für } n=m \\ 0 \text{ sonst}}}}_{a_m \cdot \pi} + b_n \underbrace{\int \sin(nx)\cos(mx)\,dx}_{=0}$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(mx)\,dx = \pi \cdot a_m \text{ für jedes } m = 1,2,3,\ldots$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\cos(mx)\,dx$$

Analog erhält man $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ und

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\sin(mx)\,dx.$$