DIFFERENTIALRECHNUNG

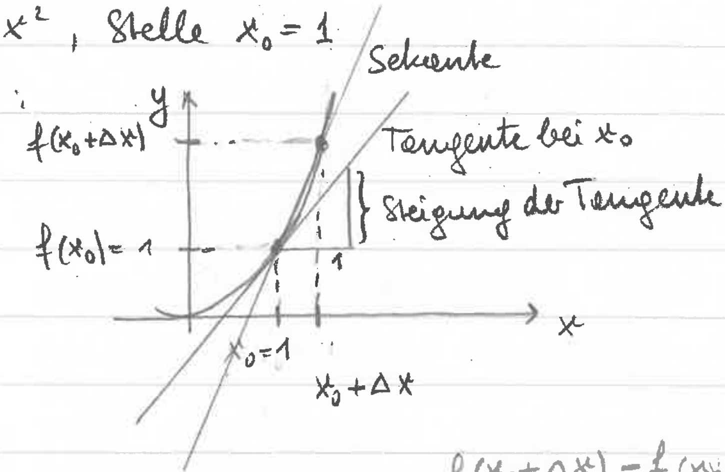
Differenzierbarkeit einer Funktion

Papula Bd. 1, IV, 1

▷ Steigung der Tangente an den Graphen einer Funktion bei einer bestimmten Stelle:

Bsp.: $f(x) = x^2$, Stelle $x_0 = 1$

Graph:



$$\text{Steigung der Tangente} \xleftarrow[\Delta x \to 0]{} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} =$$

$$= \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} =$$

$$= \underline{\underline{2x_0 + \Delta x}} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} \underline{\underline{2x_0 =: f'(x_0)}}$$

Zusammenfassung
$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ f'(x) &= 2x \end{aligned}}$$

▷ Schreibweisen und Begriffe: $y = f(x)$, $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

$$\Delta x = x_0 + \Delta x - x_0$$

$$\underbrace{f'(x_0) = y'(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}}_{\text{1. Ableitung von } y=f(x) \text{ bei } x_0} = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \underbrace{\frac{\Delta y}{\Delta x}}_{\text{Differenzenquotient}}}_{\text{Differentialquotient = Grenzwert von}}$$

▷ Ableitung wichtiger Funktionen: Gesamtliste siehe Papula Bd. 1, IV, Abschnitt 1.3.

$f(x)$	$f'(x)$
Konstante c	0
Potenzfkt. x^n	$n \cdot x^{n-1}$
↳ Bsp. $\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$

Ableitungsregeln

Papula Bd. 1, IV, 2

▷ Faktorregel: Bsp. $[3x^2]' = 3 \cdot [x^2]' = 3 \cdot 2x = 6x$

Allg.: $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$ für $c \in \mathbb{R}$

▷ Summenregel: Bsp.: $[x^2 + \sin(x)]' = [x^2]' + [\sin(x)]' = 2x + \cos(x)$

Allg.: $[f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)]' =$
$f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_n'(x)$

▷ Produktregel: Bsp.: $[x^2 \cdot \sin(x)]' = [x^2]' \cdot \sin(x) +$
$x^2 \cdot [\sin(x)]'$
$= 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$

Allg.: $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

▷ Quotientenregel: Bsp.: $\left[\frac{\sin(x)}{1+x^2}\right]' = \frac{[\sin(x)]'\cdot(1+x^2) - \sin(x)\cdot[1+x^2]'}{[1+x^2]^2}$

$$= \frac{\cos(x)\cdot(1+x^2) - \sin(x)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

Allg.: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$

▷ Kettenregel: Bsp.: $\left[(1+x^2)^4\right]' = 4(1+x^2)^3\cdot 2x$

$$\left[e^{3x^2+1}\right]' = e^{3x^2+1}\cdot 6x$$

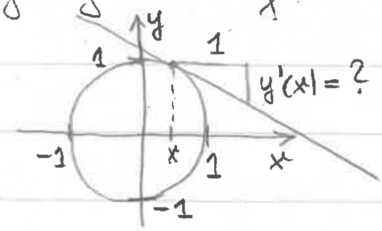
$$\left[\cos(7x)\right]' = -\sin(7x)\cdot 7$$

Allg.: $\left[g(f(x))\right]' = g'(f(x))\cdot f'(x)$

▷ Implizite Differentiation

Bsp.: Steigung einer Tangente an den Einheitskreis

$x^2 + y^2 = 1$



Variante A: $x^2+y^2=1 \rightarrow y^2 = 1-x^2$

$$y = \pm\sqrt{1-x^2}$$

oberer Halbkreis: $y(x) := \sqrt{1-x^2}$

$$\underline{\underline{y'(x)}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x) = \underline{\underline{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}}$$

Variante B (implizite Differentiation)

$$x^2 + y(x)^2 = 1 \quad \Big| \ \frac{d}{dx}$$

$$2x + 2y(x)\cdot y'(x) = 0$$

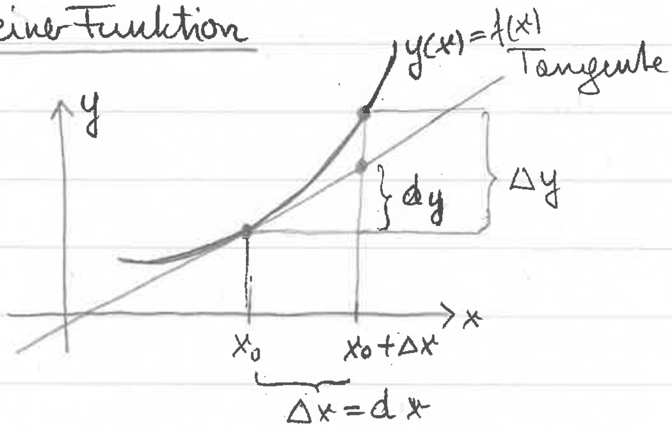
$$y(x)\cdot y'(x) = -x$$

$$y'(x) = \frac{-x}{y(x)} \underset{\uparrow}{=} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} .$$

für oberen Halbkreis

▷ Differential einer Funktion

- Grafik:



- Begriffe: Δx … Änderung der Größe x
  dx … Unabhängiges Differential, $dx = \Delta x$

  frei, unabhängig wählbar

  Folgegrößen: Δy … Änderung der Größe y, Zuwachs an y
  dy … Abhängiges Differential, oft auch df geschrieben für $y = f(x)$, lineare Approximation von Δy.

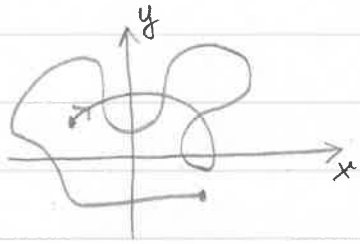
- Berechnung: $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$
  $dy = f'(x_0) \cdot dx$

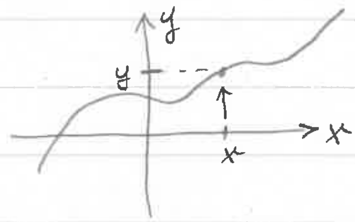
  Vergleiche: $f'(x_0) = \frac{dy}{dx} \quad | \cdot dx$
  $f'(x_0) \cdot dx = dy$

▷ Höhere Ableitungen:

$$y''(x) = f''(x)$$
$$y'''(x) = f'''(x)$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$$

▷ Ableitung einer Kurve: Achtung Kurve $\overset{\text{i.A.}}{\neq}$ Funktion



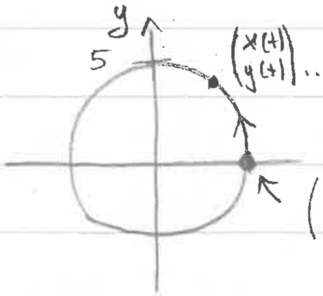


Kurve

Funktion: Jedem x des Definitionsbereichs wird genau ein y zugeordnet

Bsp.: Kreiskurve: $x(t) = 5\cdot\cos(t)$, t ... Zeit

$y(t) = 5\cdot\sin(t)$



$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ ... Ort bei t

$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ ... Startpunkt bei $t=0$

1. Ableitung der Koordinatenfunktionen nach der Zeit = Geschwindigkeit in Koordinatenrichtung

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [5\cos(t)]' \\ [5\cdot\sin(t)]' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5\cdot\sin(t) \\ 5\cdot\cos(t) \end{pmatrix}$$ ... Geschwindigkeitsvektor zum Zeitpkt. t

Schreibweise von Ableitungen nach der Zeit (nach Newton):

$$x'(t) \equiv \dot{x}(t) \,, \quad y'(t) \equiv \dot{y}(t)$$

Wie $y'(x)$ daraus berechnen?

$$\underline{\underline{y'(x)}} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x(t)} = \frac{y'(t)\cdot dt}{x'(t)\cdot dt} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} =$$

$$= \frac{5\cos(t)}{-5\sin(t)} = -\frac{\cos(t)}{\sin(t)} = \underline{\underline{-\cot(t)}}$$

▷ Einfache Anwendungsbeispiele aus Physik und Technik:

- $\left.\begin{array}{l} x(t) \ldots \text{ Ort zum Zeitpunkt } t \\ \dot{x}(t) \ldots \text{ Geschwindigkeit zum Zpkt. } t \\ \ddot{x}(t) \ldots \text{ Beschleunigung zum Zpkt. } t \end{array}\right\}$ Kinematik

Bsp.: $x(t) = \frac{1}{2} g t^2$ | $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

$\dot{x}(t) = g t$ | $\dot{x}(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cdot \omega$

$\ddot{x}(t) = g$ | $\ddot{x}(t) = -A \sin(\omega t + \varphi) \cdot \omega^2 = -\omega^2 \cdot x(t)$

- Elektrischer Schwingkreis

Anfangsspannung am Kondensator sei u_0.

Zeitverlauf der Spannung am Kondensator:

$$u(t) = u_0 \cdot \cos(\omega t) \text{ mit } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Die Ladung am Kondensator:

$$q(t) = C \cdot u(t) = C \cdot u_0 \cos(\omega t)$$

Strom im Schwingkreis:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{du}{dt} = C \cdot u_0 \cdot (-\sin(\omega t) \cdot \omega)$$

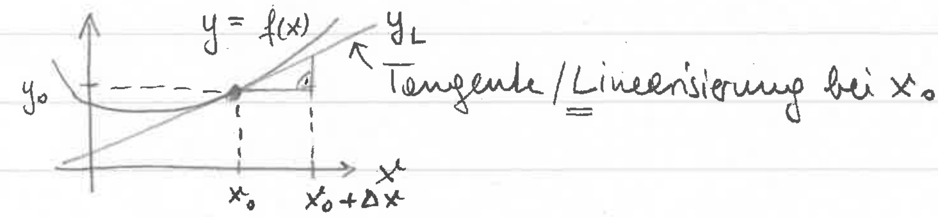
$$= -\underbrace{\omega C u_0}_{i_0 \ldots \text{ Scheitelwert des Stroms}} \sin(\omega t)$$

Anwendungen der Differentialrechnung

Papula Bd. 1, IV, 3

▷ Tangente = Linearisierung: einer Fkt. $f(x)$ bei x_0

Bild:



$$dy = y_L - y_0 \,, \quad dy = f'(x_0) \cdot dx$$

$dx = \Delta x$
$= x - x_0$

$$y_L - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

oder

$$\frac{y_L - y_0}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Bsp.: $y = e^x$ bei $x_0 = 0$

$y_0 = e^{x_0} = e^0 = 1$

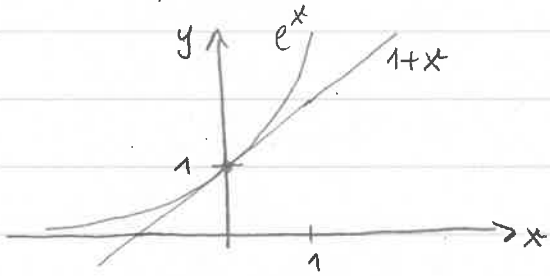
$y' = e^x$

$y'(x_0) = f'(x_0) = e^{x_0} = e^0 = 1$

$$\frac{y_L - 1}{x - 0} = 1$$

$y_L - 1 = x$

$$y_L = 1 + x$$



Bsp.: Schwingungsdauer im LC-Schaltkreis

$$T = 2\pi \sqrt{LC}$$

mit $L = 0{,}1\,H$ und $C = 10\,\mu F = 10^{-5}\,F$ erhält man

$$T = 2\pi \sqrt{0{,}1 \cdot 10^{-5}}\ s$$
$$= 6{,}28 \cdot 10^{-3}\ s = 6{,}28\ ms$$

Änderung von C um $\Delta C = dC = 0{,}2\,\mu F = 2 \cdot 10^{-7}\,F$

ergibt eine linear approximierte Änderung von T um

$$dT = T'(C)\cdot dC$$
$$= 2\pi \frac{\sqrt{L}}{2\sqrt{C}}\cdot dC = \pi\sqrt{\frac{L}{C}}\cdot dC$$
$$= \pi\sqrt{\frac{0{,}1}{10^{-5}}}\cdot 2\cdot 10^{-7} = \underline{\underline{0{,}06\,ms}}$$

Exakte Änderung $\Delta T = 2\pi\sqrt{L(C+dC)} - 2\pi\sqrt{LC} = \underline{\underline{0{,}07\,ms}}$

▷ Monotonie und Krümmung:

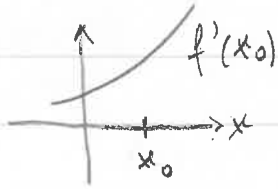
$f'(x_0) > 0$: Fkt. wächst streng monoton bei x_0

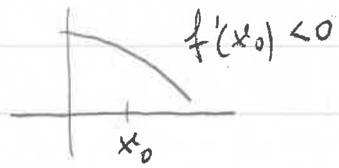
$f'(x_0) < 0$: Fkt. fällt streng monoton bei x_0.

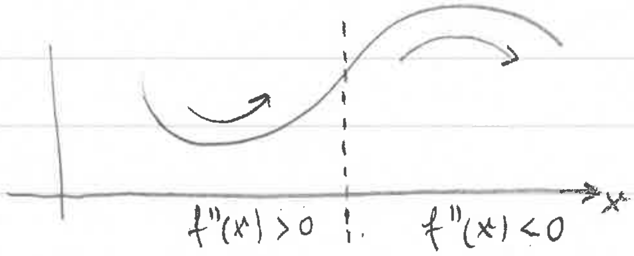
$f''(x_0) > 0$: Fkt. ist linksgekrümmt bei x_0

$f''(x_0) < 0$: Fkt. ist rechtsgekrümmt bei x_0

Bilder:







▷ Charakteristische Punkte:

Eine Fkt. $f(x)$ besitzt bei x_0 ein relatives (= lokales) Maximum (bzw. Minimum), wenn in einer Umgebung von x_0 folgendes gilt:

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad (\text{bzw. } f(x_0) \leq f(x)).$$

Relative Maxima und Minima sind die relativen Extremwerte der Fkt..

Notwendige Bedingung für einen relativen Extremwert:

$$\boxed{x_0 \text{ rel. Extremwert} \Rightarrow f'(x_0)=0, \text{ d.h. waagrechte Tangente bei } x_0}$$

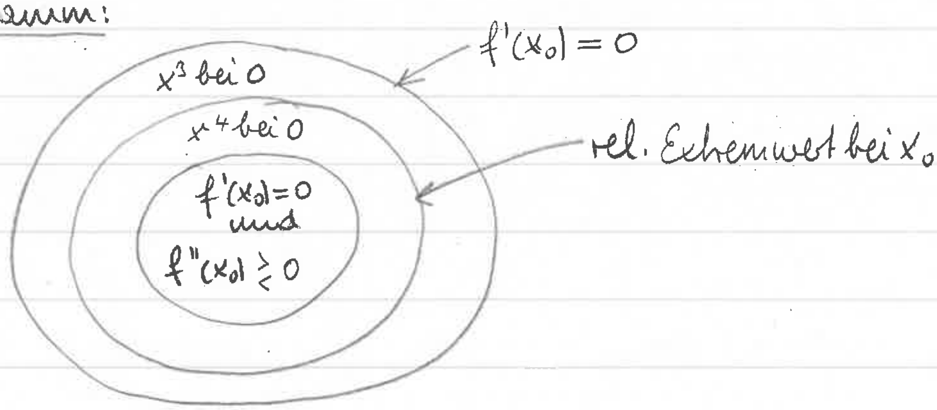
Achtung: $\not\Leftarrow$

Bsp.: $f(x)=x^3$ bei $x_0=0$.

Hinreichende Bedingung für einen relativen Extremwert:

$$\boxed{\begin{array}{l} f'(x_0)=0 \text{ und } f''(x_0)>0 \Rightarrow x_0 \text{ rel. Minimum} \\ f'(x_0)=0 \text{ und } f''(x_0)<0 \Rightarrow x_0 \text{ rel. Maximum} \end{array}}$$

Mengendiagramm:

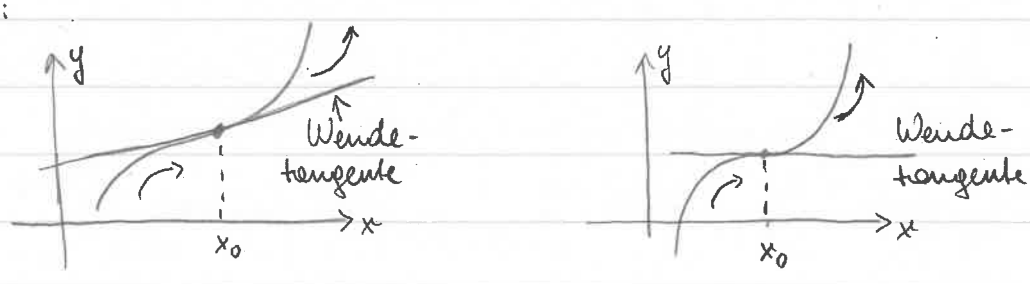


▷ Wendepunkte und Sattelpunkte:

Def.: • Punkte, bei denen sich der Drehsinn, d.h. die Krümmung, ändert, heißen **Wendepunkte**.

• Wendepunkte mit waagrechter Tangente heißen **Sattelpunkte**.

Bilder:



Hinreichende Bedingung:

$$\underline{f''(x_0)=0} \text{ und } \underline{f'''(x_0)\neq 0} \implies x_0 \text{ ist } \underline{\text{Wendepunkt}}$$

Achtung: $\not\Leftarrow$

Bsp. $f(x)=x^5$ bei $x_0=0$

▷ Allg. Kriterium für einen relativen Extremwert:
Sei $\underline{f'(x_0)=0}$ und die nächste nichtverschwindende Ableitung bei x_0 sei die n-te Ableitung $f^{(n)}(x_0)$ mit $n>1$. Dann ist x_0 ein relativer Extremwert, wenn n gerade ist, und es gilt dann:

x_0 ist ein rel. Minimum, falls $f^{(n)}(x_0)>0$.
x_0 ist ein rel. Maximum, falls $f^{(n)}(x_0)<0$.

Ist n ungerade, dann ist x_0 ein Sattelpunkt.

▷ Extremwertaufgaben

- Zielfunktion hängt typischerweise von 2 Inputgrößen ab. Durch eine Nebenbedingung kann die Zielfunktion auf 1 Inputgröße reduziert werden.
- Die resultierende Zielfunktion ist typischerweise nur auf einem Intervall definiert. Die inneren rel. Extremwerte werden mittels Differentialrechnung bestimmt. Diese werden mit den Funktionswerten an den Randpunkten des Intervalls verglichen.

▷ Kurvendiskussion beinhaltet: Definitionsbereich, Symmetrie (gerade oder ungerade oder nichts), Nullstellen, Pole, Ableitungen bis 2. Grad, rel. Extremwerte, Wendepunkte, Sattelpunkte, Verhalten für $x\to\pm\infty$, Asymptoten, Wertebereich, Graph

Taylorreihen

Papula Bd. 1, VI, 3

▷ Eine Potenzreihe in x ist definiert als

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \underbrace{a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n}_{\text{Polynom } n\text{-ten Grades}} + \dots$$

Die reellen Zahlen a_n heißen Koeffizienten der Potenzreihe.

▷ Mac Laurinsche Reihe: Gegeben sei eine Fkt. $f(x)$

Annahmen: – Die Funktion läßt sich in eine Potenzreihe $f(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$ eindeutig entwickeln.

– $f(x)$ läßt sich bei $x = 0$ beliebig oft differenzieren.

Dann lassen sich die Koeffizienten der Potenzreihe aus den Ableitungen von f bei $x=0$ eindeutig bestimmen:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots$$
$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + 4 \cdot 3 a_4 x^2 + \dots$$
$$f'''(x) = 3 \cdot 2 a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 a_4 x + \dots$$

etc

An der Entwicklungsstelle $x = 0$:

$$f(0) = a_0 = 0! \cdot a_0 \qquad \text{WH: } 0! := 1$$
$$f'(0) = a_1 = 1! \cdot a_1$$
$$f''(0) = 2a_2 = 2! \cdot a_2$$
$$f'''(0) = 3 \cdot 2 a_3 = 3! \cdot a_3$$

etc. etc.

Allg.: $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

und $$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n \\ &= f(0) + f'(0)\,x + \frac{1}{2} f''(0)\,x^2 + \frac{1}{6} f'''(0)\,x^3 + \ldots \end{aligned}}$$

Das ist die Mac Laurinsche Reihe von $f(x)$.

Bsp.: • $f(x) = e^x \quad \rightarrow f^{(n)}(x) = e^x$ und $f^{(n)}(0) = 1$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \ldots = \sum_{n=0} \frac{x^n}{n!}$$

• $f(x) = \sin(x)$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

• $f(x) = \cos(x)$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

▷ Die Taylorsche Reihe (= Taylorreihe): Entwicklung einer geg. Funktion $f(x)$ in eine Potenzreihe bei $x = x_0$.

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n = \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(x_0)(x-x_0)^3 + \ldots \end{aligned}}$$

Bsp.: $f(x) = \ln(x)$ ist bei $x = 0$ nicht definiert. Daher Entwicklung in Potenzreihe bei z.B. $x_0 = 1$, d.h. Taylorreihe bei $x_0 = 1$.

$f(x) = \ln(x) \quad \rightarrow \quad f(x_0) = f(1) = \ln(1) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \qquad f'(x_0) = f'(1) = 1$

$f''(x) = -x^{-2} \qquad f''(x_0) = f''(1) = -1$

$f'''(x) = 2\,x^{-3} \qquad f'''(x_0) = f'''(1) = 2$

$f^{(4)}(x) = -2\cdot 3\cdot x^{-4} \qquad f^{(4)}(x_0) = f^{(4)}(1) = -6$

etc. $\qquad$ etc.

$$\ln(x) = 0 + 1(x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 - \frac{6}{4!}(x-1)^4 + \dots$$
$$= \frac{(x-1)}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}.$$

Mehr in der Tabelle im Papula Bd. 1, VI, 3 auf Seite 608f.

▷ Anwendungen der Taylorreihe und der Mac Laurinschen Reihe:

- Abbrechen der Taylorreihe beim inkl. n-ter Potenz liefert ein Näherungspolynom n-ten Grades an die Fkt. bei x_0.

  $n=1$: $f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ ... Tangente

  $n=2$: $f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2$ ... Parabel

- Berechnung von e: $e^1 \underset{\uparrow}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

  Mac Laurinsche Reihe

- Integrationsapproximation durch Ersetzen des Integranden

  Bsp. $\int_0^x e^{-t^2} dt$, $e^x = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

  $$e^{-t^2} = 1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \dots$$

  $$\int_0^x e^{-t^2} dt \underset{\uparrow}{\simeq} \int_0^x 1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} \, dt$$

  Abbruch der Reihe bei t^6.

- Grenzwertregeln von Bernoulli und de L'Hospital:

Wir betrachten den Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$, z.B.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ lässt sich nicht direkt berechnen, da $e^0 - 1 = 0$ und daher $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x-1}{x} = „\frac{0}{0}“$.

Allg. Lösung:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\overbrace{f(x_0)}^{=0} + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots}{\underbrace{g(x_0)}_{=0} + g'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} g''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots} =$$

Kürzen von $(x-x_0)$ liefert

$$= \frac{f'(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0) + \dots}{g'(x_0) + \frac{1}{2} g''(x_0)(x-x_0) + \dots}$$

Falls $g'(x_0) \neq 0$, kann man im letzten Bruch $x = x_0$ setzen und erhält folgende Grenzwertregel

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Bsp.:

$$\left.\begin{array}{ll} f(x) = e^x - 1, & g(x) = x, \quad x_0 = 0 \\ f'(x) = e^x & , g'(x) = 1 \\ f'(x_0) = 1 & , g'(1) = 1 \end{array}\right\rangle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{1} = 1.$$

Weitere Grenzwertregeln und Tricks

Falls $\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ vom Typ $„\frac{0}{0}“$ oder $„\frac{\infty}{\infty}“$ ist dann gilt

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Bemerkungen:
- gilt auch für $x \to \infty$ oder $x \to -\infty$
- Evtl. ist mehrmaliges Anwenden der Regel notwendig.
- Andere Ausdruckstypen lassen sich oft auf $„\frac{0}{0}“$ od. $„\frac{\infty}{\infty}“$ umformen.

Ausdruck	Grenzwert	Umformung zu
$u(x) \cdot v(x)$	$0 \cdot \infty$ bzw $\infty \cdot 0$	$\frac{u(x)}{\frac{1}{v(x)}}$ bzw. $\frac{v(x)}{\frac{1}{u(x)}}$
$u(x) - v(x)$	$\infty - \infty$	$\frac{\frac{1}{v(x)} - \frac{1}{u(x)}}{\frac{1}{u(x) \cdot v(x)}}$
$u(x)^{v(x)}$	$0^0, \infty^0, 1^\infty$	$e^{v(x) \cdot \ln(u(x))}$