Reelle Matrizen

Papula Bd. 2, I, 2

▷ Definition einer $m \times n$ Matrix

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \begin{cases} A_{ik} \in \mathbb{R} \rightarrow \text{reelle Matrix} \\ A_{ik} \in \mathbb{C} \rightarrow \text{komplexe Matrix} \end{cases}$$

m ... Anzahl der Zeilen, n ... Anzahl der Spalten

Wenn $m = n \rightarrow$ quadratische Matrix

$m = 1 \rightarrow$ Zeilenmatrix, Zeilenvektor

$n = 1 \rightarrow$ Spaltenmatrix, Spaltenvektor

$m = n = 1 \rightarrow$ Zahl / Skalar

▷ Spezielle Matrizen:

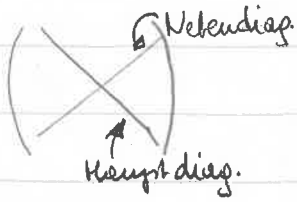
- Nullmatrix der Form $m \times n$ hat lauter Null-Einträge

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Schreibweise (vgl. für Nullvektoren)

- Einsermatrix der Form $m \times n$ hat lauter Eins-Einträge
- Einheitsmatrix der Form $n \times n$ (Achtung: nur quadratisch!) hat Einsen auf der (Haupt-) Diagonalen und sonst Nullen:

$$\mathbb{1} \equiv E \equiv \underset{\text{engl.}}{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix};$$



- Diagonalmatrix hat außerhalb der (Haupt-) Diagonalen Null-Einträge:

$$\begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

• Obere und untere Dreiecksmatrizen

$$\begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} * & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

▷ Ansichten: als Anordnung von Zahlen $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

als Anordnung von Spaltenvektoren $\Big(\,|\;|\;|\;|\;|\, \Big)$

als Anordnung von Zeilenvektoren $\Big(\equiv \Big)$

▷ Transponieren: Bsp. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

$(A^T)_{ik} = A_{ki}$, Vertauschen von Spalten mit Zeilen

$\underset{m \times n}{A} \Longleftrightarrow \underset{n \times m}{A^T}$

Wenn $A^T = A$, dann heißt A symmetrische Matrix

Wenn $A^T = -A$, — " — schiefsymmetr. — " —

▷ Gleichheit von Matrizen: $A = B \Longleftrightarrow A_{ik} = B_{ik}$ für alle i und k

d.h.: elementweise, vgl. Vektoren

▷ Rechenoperationen: vgl. Vektoren

- $+, -$ elementweise, es gilt $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$
- Skalarmultipl., elementweise: $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

Bsp.: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 10 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 10 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$

▷ <u>Multiplikation von Matrizen</u>: Nur definiert, wenn die Anzahl an Spalten der ersten Matrix gleich der Anzahl an Zeilen der zweiten Matrix ist:

$$\underset{m\times \boxed{n}}{A} \cdot \underset{\boxed{n}\times p}{B} = \underset{m\times p}{C}$$

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\Big\rangle$ $A \cdot B = C$

$$\underset{2\times 2}{A} \quad = \quad \underset{2\times 3}{B} \qquad \underset{2\times 3}{C}$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 17 \\ 11 & 2 & 13 \end{pmatrix}$$

<u>Rechenregeln</u>:
- im Allgemeinenen ist $A \cdot B \neq B \cdot A$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $\mathbb{1} A = A \mathbb{1} = A$

<u>Bemerkung</u>: Das innere Produkt von zwei Vektoren a und b kann (und wird oft) als Matrixprodukt geschrieben:
a und b als Spaltenvektoren $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$$a^T b = (a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

<u>Ansichten der Matrixmultiplikation</u>:
- geordnete Ansammlung von inneren Produkten der Zeilenvektoren der ersten Matrix mit den Spaltenvektoren der zweiten Matrix
- Linearkombination(en) der Spaltenvektoren der ersten Matrix mit den Spaltenvektoreinträgen der zweiten Matrix als Koeffizienten
- etc.

Determinanten

Papula Bd. 2, I, 3

▷ Einführendes Beispiel: Gleichungssystem mit 2 Variablen x_1 und x_2

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= c_2 \end{aligned}\right\} \text{ in Matrix|Vektor-Form } \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}_{c}$$

mittels Eliminationsverfahren (= Gauß-Verfahren) lassen sich x_1 und x_2 freistellen:

$$x_1 = \frac{c_1 a_{22} - c_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{a_{11}c_2 - a_{21}c_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

D.h.: Wenn der Nenner $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$, dann hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung.

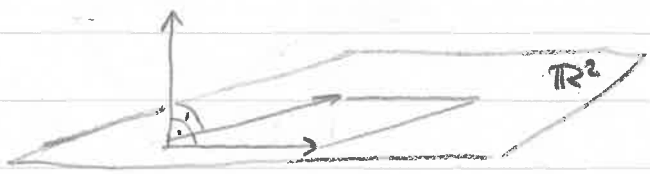
▷ Definition: Die Zahl $\det(A) := a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ ist die Determinante der Matrix A.

▷ Schreibweisenvariante: $|A|$

▷ Berechnung: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ = Produkt d. Hauptdiagonalelemente minus Produkt der Nebendiagonalelemente

vgl. Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \det(A) \end{pmatrix}$$



$\Rightarrow$ det(A) ist (bis auf Vorzeichen) die Fläche des von den Spaltenvektoren von A aufgespannten Parallelogramms in $\mathbb{R}^2$.

▷ <u>Eigenschaften der Determinante:</u> gelten für <u>alle quadr.</u> Matrizen

→ $\det(A^T) = \det(A)$

→ siehe Papula für mehr Eigenschaften, z.B.
Wenn man zu einer Zeile (oder Spalte) ein Vielfaches einer anderen Zeile (bzw. Spalte) addiert, ändert sich die Determinante der Matrix nicht.

→ $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) \implies \det(\mathbb{1}) = 1$

→ Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist gleich dem Produkt der Hauptdiagonalelemente. $\implies \det(\mathbb{1}) = 1$

▷ <u>Berechnung für 3×3 Matrizen:</u> Regel von Sarrus

$$
\begin{array}{ccc|cc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
- & - & - & + & + \quad +
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\det(A) = \; & a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} \\
& - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{32} a_{23} a_{11} - a_{33} a_{21} a_{12}
\end{aligned}
$$

▷ <u>Berechnung für $n \times n$ Matrizen:</u> Laplacescher Entwicklungssatz (siehe Papula) und Computer

Ergänzungen

Papula Bd. 2, I, 4

▷ Eine $n \times n$ Matrix A heißt regulär, wenn $\det(A) \neq 0$.
— " — singulär — " — $= 0$.

▷ Gibt es zu einer $n \times n$ Matrix A eine Matrix X mit

$$AX = XA = \mathbb{1},$$

dann heißt X die zu A inverse Matrix und wird als A^{-1} geschrieben.

→ Falls A^{-1} existiert, ist A^{-1} eindeutig

→ — " — , heißt A invertierbar

→ A^{-1} existiert $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ ist regulär.

→ Rechenregeln:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$
$$(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1} =: A^{-T}$$
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

→ Berechnung der Inversen einer 2×2 Matrix: siehe nächste Seite unten

▷ Eine $n \times n$ Matrix A heißt orthogonal, wenn $A \cdot A^T = A^T \cdot A = \mathbb{1}$, wenn also $A^{-1} = A^T$ ist.

→ Die Zeilen- bzw. Spaltenvektoren einer orthogonalen Matrix A sind zueinander orthogonale Einheitsvektoren

→ Aus $AA^T = \mathbb{1}$ folgt

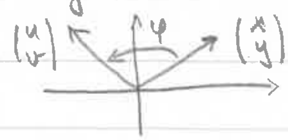
$$\det(AA^T) = \det(\mathbb{1})$$
$$\det(A) \cdot \det(A^T) = 1$$
$$\det(A)^2 = 1$$
$$\det(A) = \pm 1.$$

→ Die Inverse einer orthogonalen Matrix ist wieder orthogonal.

→ Das Produkt orthogonaler Matrizen ist wieder orthogonal.

Bsp.: Drehung um Winkel φ gegen den Uhrzeigersinn in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



D Der Rang einer $m \times n$ Matrix ist die Maximalzahl linear unabhängiger Spalten- od. Zeilenvektoren.

$\Rightarrow$ Durch elementare Umformungen ändert sich der Rang nicht.

↳ 2 Zeilen od. Spalten vertauschen

↳ Multiplizieren einer Zeile od. Spalte mit $\lambda \neq 0$.

↳ Ein Vielfaches einer Zeile od. Spalte zu einer anderen Zeile bzw. Spalte addieren.

$\Rightarrow$ Rangbestimmung mit Hilfe elementarer Umformungen

Bringe A in die sogenannte Trepenform

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & b_{1,r+1} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & b_{2,r+1} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & b_{r,r+1} & \dots & b_{r,n} \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} r \text{ Zeilen} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\} \begin{array}{l} m-r \\ \text{Nullzeilen} \end{array} \end{array}$$

mit $b_{11} \neq 0, b_{22} \neq 0, \dots, b_{rr} \neq 0$. Der Rang von A, geschrieben als $Rg(A)$, ist dann gleich r: $\underline{Rg(A) = r}$.

Bsp. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 2 & 7 & -8 & 7 \\ -1 & 0 & 11 & 21 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow Rg(A) = 2$.

Nachtrag: Berechnung der Inversen einer 2×2 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Lineare Gleichungssysteme

Papula Bd. 2, I, 5

▷ Lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = c_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = c_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = c_m$$

in Matrix/Vektorform:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}}_{c}$$

$$\boxed{A \qquad x = c}$$

Begriffe:
- Das Glg.-system heißt homogen, wenn $c = 0$: $Ax = 0$.
- Wenn $m = n$: quadratisches Glg.-system
- A ... Koeffizientenmatrix : $m \times n$
  $(A|c)$ ... erweiterte Koeffizientenmatrix : $m \times (n+1)$

Bsp.:
$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 &= 8 \end{aligned}\right\rangle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}}_{c}$$

$$(A|c) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

▷ Lösungsstruktur

① Ein inhomogenes Glg.sys. $Ax = c$ hat $c \neq 0$ und entweder genau eine, unendlich viele oder keine Lösung.

② Ein homogenes Glg.syst. $Ax = 0$ besitzt immer die triviale Lsg. $x = 0$. Es hat entweder genau eine Lösung (nämlich die triviale) oder unendlich viele Lösungen (darunter die triviale).

▷ Warnung: Die Form des Glg.systems $Ax = c$

- $m > n$ ... überbestimmt
- $m = n$ ... quadratisch
- $m < n$ ... unterbestimmt

gibt keinen Aufschluss darüber, wieviele Lsgen es hat!

▷ Gaußscher Algorithmus: Äquivalente Umformungen sind solche, die die Lösungsmenge eines Glg.syst. nicht ändern:

- Zwei Gleichungen vertauschen
- Eine Glg. mit einer Zahl $\lambda \neq 0$ multiplizieren.
- Eine Glg. zu einer anderen addieren.
- Spaltenvertauschungen (Variablenvertauschungen)

Wir arbeiten mit der erweitesten Koeffizientenmatrix:

Bsp.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 7 \\ 2x_1 + 3x_2 \phantom{{}+8x_3} &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 &= -28 \end{aligned} \qquad \left.\begin{array}{cccc|l} 1 & 2 & -2 & 7 & \\ 2 & 3 & 0 & 0 & -2\cdot \text{Zeile } 1 \\ 2 & 1 & 8 & -28 & -2\cdot \text{Zeile } 1 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 2 & -2 & 7 & \\ 0 & -1 & 4 & -14 & \\ 0 & -3 & 12 & -42 & -3\cdot \text{Zeile } 2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 4 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Rang}(A) = 2 \\ \text{Rang}(A|c) = 2 \end{array}$$

Lösung: x_3 frei wählbar, $-x_2 + 4x_3 = -14 \Rightarrow$
$x_2 = 4x_3 + 14$, $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 7 \Rightarrow \ldots \Rightarrow x_1 = -6x_3 - 21$.

▷ Allg. Lösungsstruktur eines $m \times n$ Glg.systems:

$\boxed{Ax = c}$

- $\boxed{Rg(A) = Rg(A|c) =: r}$
  - $\boxed{r = n}$ genau eine Lösung
  - $\boxed{r < n}$ unendlich viele Lösungen mit $n-r$ frei wählbaren Parametern
- $\boxed{Rg(A) \neq Rg(A|c)}$: keine Lösung

▷ Allg. Lösungsstruktur eines inhomogenen $n \times n$ Glg.systems:

$\boxed{Ax = c}$

- $\boxed{\det(A) \neq 0}$ genau eine Lsg.
- $\boxed{\det(A) = 0}$
  - $\boxed{Rg(A) = Rg(A|c) =: r}$ unendl. viele Lsgn. mit $n-r$ frei w. Param.
  - $\boxed{Rg(A) \neq Rg(A|c)}$ keine Lsg.

$$Ax = c \quad | \; A^{-1} \cdot$$
$$\underbrace{A^{-1}A}\, x = A^{-1}c$$
$$\mathbb{1}\, x = A^{-1}c$$
$$x = A^{-1}c$$

▷ Allg. Lösungsstruktur eines homogenen $n \times n$ Glgsyst.:

$\boxed{Ax = 0}$

- $\boxed{\det(A) \neq 0}$ genau eine Lsg.
- $\boxed{\det(A) = 0}$ unendl. viele Lsgn.

▷ Cramersche Regel: Für $n \times n$ Glg.sys. $Ax = c$ mit $\det(A) \neq 0$.

Die eindeutige Lösung lässt sich so berechnen

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)},$$

wobei A_i aus A hervorgeht, indem die i-te Spalte von A durch c ersetzt wird.

Bsp.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 6 \end{aligned}\right\rangle \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}}_{c}$$

$$x_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}} = \frac{3}{-3} = 1, \quad x_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}} = \frac{-6}{-3} = 2$$

Eigenwerte und Eigenvektoren

Papula Bd. 2, I, 7

Für eine quadr. Matrix A suchen wir jene Zahlen λ und Vektoren $x \neq 0$ mit

$$\boxed{Ax = \lambda x.}$$

Ein solches Paar λ, x heißt Eigenwert λ und Eigenvektor x zum Eigenwert λ. Abkürzungen: EW EV

Falls λ, x existiert, dann gelten

$$Ax - \lambda x = 0$$

$$Ax - \lambda \mathbb{1} x = 0$$

$$(A - \lambda \mathbb{1})x = 0$$

Da $x \neq 0$ hat $(A - \lambda \mathbb{1})x = 0$ ∞-viele Lsgn. Daher gilt

$$\boxed{\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0}$$

Beispiel $A = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \det\left[\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] =$

$$= \det\begin{pmatrix} -2-\lambda & -5 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda)(4-\lambda) + 5 =$$

$$= -8 + 2\lambda - 4\lambda + \lambda^2 + 5 = \underline{\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0}$$

Diese quadr. Glg. hat die Lsgn. $\lambda_1 = -1$ ... Eigenwert

$\lambda_2 = 3$ ... Eigenwert

Eigenvektoren zu $\lambda_1 = -1$: $(A - \lambda_1 \mathbb{1})x = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 + 5x_2 = 0$$

$x_1 = -5x_2$, ∞-viele Lsgn.

z.B. $\underline{\underline{\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}}} =: v_1$

Eigenvektor zu $\lambda_2 = 3$: $(A - \lambda_2 \mathbb{1})x = 0$

$$\begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 + x_2 = 0$$

$x_1 = -x_2$, ∞-viele Lsgn.

z.B. $\underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}} =: v_2$

Bemerkungen:

- Jedes Vielfaches (außer mal Null) eines Eigenvektors zum EW λ ist wieder EV zum EW λ.
- $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$ heißt charakteristische Gleichung.
- Die Eigenwerte einer Diagonal- bzw. Dreiecksmatrix sind die (Haupt)diagonalelemente.
- Alle Eigenwerte einer symmetrischen Matrix sind reell, und die EV zu verschiedenen EW sind orthogonal.