VII Komplexe Zahlen und Funktionen

1 Definition und Darstellung

▷ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ um entsprechende Probleme lösen zu können:

$5+x=8$, $8+x=5$, $8\cdot x=5$, $x^2=2$, $x^2=-1$.

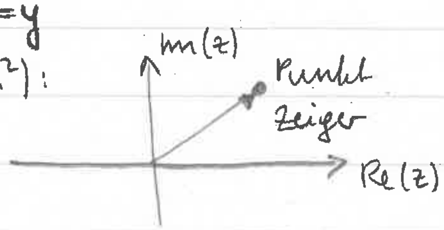
Was kommt nach $\mathbb{C}$? $\ldots \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \subseteq \ldots$?

▷ Anwendungen von komplexen Zahlen: Elektrotechnik, Fourier-Trafo, Quantenmechanik, $\mathbb{R}^2$-Vektorrechnung mit Produkt erweitern

▷ Definition: $z = x + jy$, oder $z = \underset{\text{reelle Einheit}}{x\cdot 1} + \underset{\text{imag. Einheit}}{y\cdot j}$, $j^2=-1$

- informationstechnische Sicht: z wird mit den 2 reellen Zahlen x und y identifiziert.
- $Re(z) = x$, $Im(z) = y$

▷ Komplexe/Gaußsche Zahlenebene ($\mathbb{R}^2$):



▷ - Gleichheit: $z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$

- Betrag, Norm, Länge: $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ vgl. Pythagoras und Vektorrechg. im $\mathbb{R}^2$
- konjugiert komplexe Zahl z^* von $z = x+jy$ ist $z^* = x - jy$

Spiegeln an $Re(z)$-Achse, $(z^*)^* = z$

$z^* = z \iff z \in \mathbb{R}$, $|z| = \sqrt{z^* z}$

▷ Darstellungsformen

- kartesische Form: $z = x + jy$

- trigonometrische Form: $z = r\cdot\cos\varphi + jr\sin\varphi$

vgl. Einheitskreis, $r = |z|$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

- Exponentialform: Eulersche Formel $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi \mid \cdot r$

$\Rightarrow z = r\cdot e^{j\varphi} = r\cos\varphi + jr\sin\varphi$

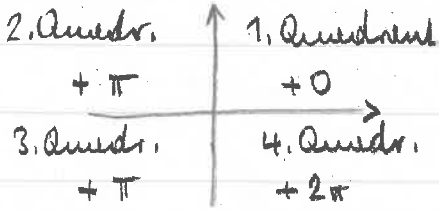
$e^{j\varphi}$ definiert über Reihe: $e^x = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots$

- Umrechnung zw. den Darstellungsformen:

$(r,\varphi) \rightarrow (x,y)$ ist leicht: $z = \underbrace{r\cos\varphi}_{x} + j\underbrace{r\cdot\sin\varphi}_{y}$

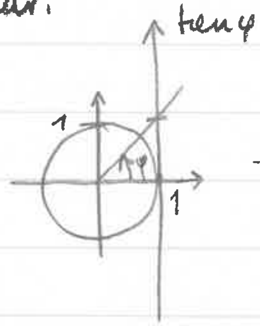
$(x,y) \rightarrow (r,\varphi)$ etwas kompliziert: $r = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\varphi = \arctan(y/x) + \begin{cases} 0 \\ \pi \\ 2\pi \end{cases}$$

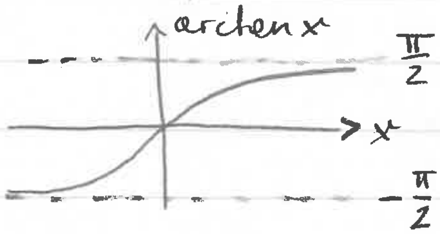


WH arctan:

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \underset{\arctan}{\overset{\tan}{\longleftrightarrow}} \mathbb{R}$$



$\tan\varphi := \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$



- Bemerkungen: $z = r\cdot e^{j\varphi} \Rightarrow z^* = r\cdot e^{-j\varphi}$

$(r,\varphi) \rightarrow (r,-\varphi)$

$\boxed{2}$ Komplexe Rechnung

▷ Vier Rechenoperationen: $+, -, \cdot, :$ bzw. $+, \cdot$ mit $-$ und $:$ als Operation mit dem inversen Element

Wie definiert? – So, dass das Rechnen mit reellen Zahlen $x \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ weiterhin dasselbe Ergebnis liefert.

– Berücksichtigen, dass $j^2 = -1$ ergibt.

Was geht verloren? Reelle Zahlen haben eine Ordnung $-4.3 \leq \pi$, komplexe Zahlen haben keine Ordnung.

▷ Addition (und Subtraktion):

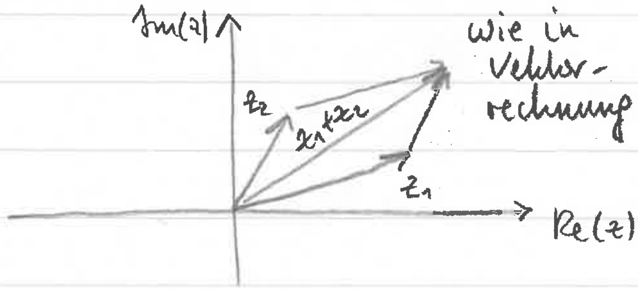
$$
\begin{array}{rl}
z_1 = & 3 + j4 \\
z_2 = & -2 + j5 \\
\hline
z_1 + z_2 = & 1 + j9
\end{array}
$$

komponentenweise in kartesischer Form

in Polar/Exponentialform: $z_1 = r_1 e^{j\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{j\varphi_2}$

$z_1 + z_2 \neq (r_1 + r_2) e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$ ⚠

komplexe Zahlenebene:



▷ Multiplikation (und Division)

in kartesischer Form:

$z_1 = 3 + j4$, $z_2 = -2 + j5$ Bem.: $3j = j3 = j \cdot 3$, $z_1 z_2 = z_1 \cdot z_2$

$z_1 \cdot z_2 = (3 + 4j) \cdot (-2 + 5j) =$

$= 3 \cdot (-2) + 3 \cdot 5j + 4j \cdot (-2) + 4j \cdot 5j$

$= -6 + 15j - 8j + 20j^2 = -6 + 7j + 20(-1)$

$= \underline{-26 + 7j}$

Bem.: • $\boxed{z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1}$ (kommutativ)

• $z \cdot z^* = |z|^2 \Rightarrow$ Bsp.: $z = 3-4j$, $z^* = 3+4j$

$z \cdot z^* = (3-4j)(3+4j) =$

vgl. $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$= 9 - (4j)^2 = 9 + 16 = 3^2 + 4^2 = 25$

$= \left(\sqrt{3^2 + (-4)^2}\right)^2$ ✓

<u>Potenzieren:</u> $\boxed{z^n \text{ für } n = 0, 1, 2, 3, \ldots}$

$z^0 = 1$

$z^1 = z$

$z^2 = z \cdot z$

$z^3 = z \cdot z \cdot z$

etc

Bsp.: j^n: $j^0 = 1$

$j^1 = j$

$j^2 = -1$

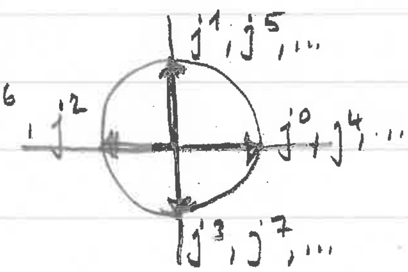
$j^3 = -j$

$j^4 = 1$

$j^5 = j$

$j^6 = -1$ etc.

komplexe Zahlenebene:



<u>Division:</u> mit dem konj. komplexen Nenner erweitern

Bsp.: $z_1 = 4 - 8j$, $z_2 = 3 + 4j$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4-8j}{3+4j} = \frac{(4-8j)(3-4j)}{(3+4j)(3-4j)} = \frac{12 - 40j - 32}{9 + 16}$$

$$= \frac{-20-40j}{25} = -\frac{4}{5} - \frac{8}{5}j = \underline{\underline{-0.8 - 1.6j}}$$

in Polarform: $z_1 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1}$, $z_2 = r_2 \cdot e^{j\varphi_2}$

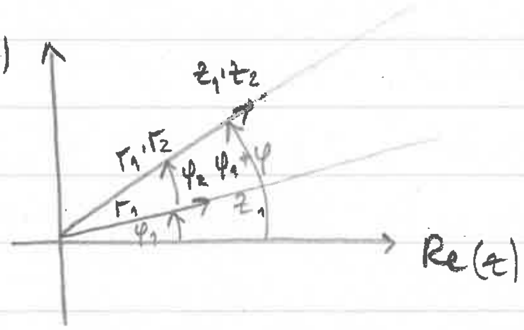
$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1} \cdot r_2 \cdot e^{j\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{j\varphi_1} \cdot e^{j\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$$

⇒ Die Radien werden multipliziert, und die Winkel werden addiert.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cdot e^{j\varphi_1}}{r_2 \cdot e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j\varphi_1 - j\varphi_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}$$

⇒ Die Radien werden dividiert, und die Winkel werden subtrahiert.

Geometrie: Multiplikation   siehe Papula für mehr Bsp.



$\boxed{\text{Drehstreckung}}$
bzw. Drehstauchung

speziell: Multiplikation mit z_2 mit Länge 1, d.h. $z_2 = 1 \cdot e^{j\varphi_2} = e^{j\varphi_2}$ führt zu Drehung um Winkel φ_2 des anderen Faktors.

▷ Bem.: Die Rechenregeln von ℝ (Kommutativgesetz, Assoziativgesetz, Distributivgesetz) gelten auch in ℂ, vgl. Papula.

▷ Potenzieren in Polarform: $z = r \cdot e^{j\varphi}$

$$z^n = (r \cdot e^{j\varphi})^n = r^n \cdot (e^{j\varphi})^n = r^n \cdot e^{jn\varphi}.$$

Bsp.: $z = 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$, siehe Papula S. 674

$$e^{j\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(j\varphi)^n}{n!} = \text{siehe Papula S. 652}$$

▷ **Wurzelziehen und algebraische Gleichungen**

Bsp.: $z^2 - 4z + 13 = 0$ ... quadratische Gleichung

$$\underline{\underline{z_{1,2}}} = \underbrace{-\frac{-4}{2}}_{2} \pm \sqrt{2^2 - 13}$$

$$= 2 \pm \sqrt{-9}$$

$$= 2 \pm 3 \cdot \sqrt{-1} = \underline{\underline{2 \pm 3j}}$$

Probe: $(z - z_1)(z - z_2) =$

$(z - (2+3j))(z - (2-3j)) = \ldots = z^2 - 4z + 13$. ✓

Wurzelziehen: $\boxed{z^n = a}$ mit $a \in \mathbb{C}$, z.B. $z^4 = 3 + 2j$

(Papula S. 680)

Vorgehensweise: 1.) Schreibe a in Polar/Exponentialform

$a = r \cdot e^{j\varphi}$

2.) $z^n = a$ hat n verschiedene Lsgn.

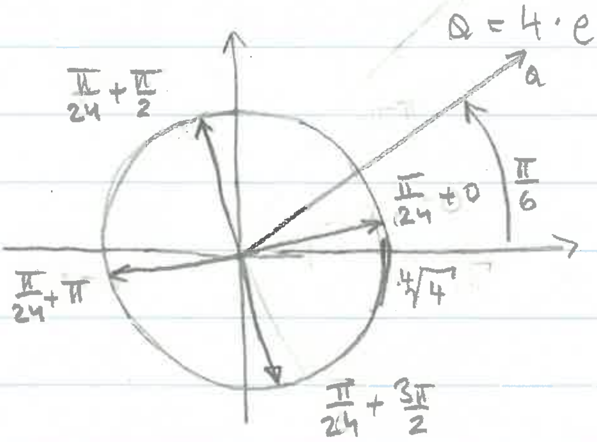
$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{j\left(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}\right)}$, $k = 0, \ldots, n-1$

Geometrie: Bsp.: $z^4 = a$ mit

$$a = 4 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{6}} = 4\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + j\, 4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 2\sqrt{3} + 2j.$$



Fundamentalsatz der Algebra: Eine algebraische Gleichung n-ten Grades $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z^1 + a_0 = 0$ besitzt in $\mathbb{C}$ stets genau n Lösungen, wobei mehrfache Lösungen entsprechend oft gezählt werden.

• Zerlegung der linken Seite in seine Linearfaktoren:

$a_n (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \cdot \ldots \cdot (z - z_n)$

$z_1, z_2, \ldots, z_n$ sind dabei die Lösungen der algebraischen Gleichung.

- Bei ausschließlich reellen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sind die Lösungen paarweise zueinander konjugiert komplexe Zahlen

→ Bsp.: $z^3 - z^2 + 4z - 4$ hat die Lsgn. $z_1 = 1$, $z_2 = 2j$, $z_3 = -2j$
und $(z-1)(z-2j)(z+2j) = z^3 - z^2 + 4z - 4$

▷ Natürlicher Logarithmus

- WH: in $\mathbb{R}$ gilt $\quad a = e^x \iff x = \ln(a)$ und das nur für $a > 0$.
- in $\mathbb{C}$: gegeben: $z = r \cdot e^{j\varphi}$

gesucht: alle $\ln(z)$ mit $e^{\ln(z)} = z$

Ansatz: $\ln(z) = x + jy$

$$e^{\ln(z)} = e^{x+jy} \overset{!}{=} r \cdot e^{j\varphi}$$

$$e^x \cdot e^{jy} = r \cdot e^{j\varphi}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^x = r: \quad x = \ln(r) \\ y = \varphi + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

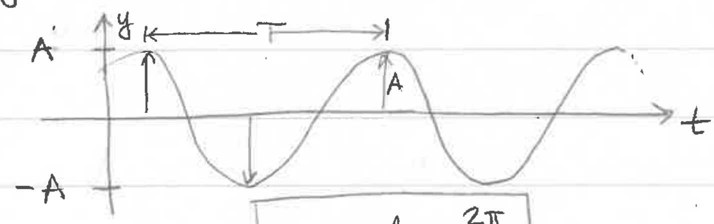
Lösung: $\underline{\ln(z) = \ln(r) + j(\varphi + k \cdot 2\pi)}$.

3 Anwendungen der komplexen Rechnung

▷ Harmonische Schwingungen sind jene, die sich schreiben lassen als: $y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ oder

$$y = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Bild:



$$\boxed{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}}$$

Wechsel zw. sin und cos: $\cos(\alpha) = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$

$$\sin(\alpha) = \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})$$

Überlagerung gleichfrequenter harmonischer Schwingungen:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = a_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) \\ y_2 = a_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2) \end{array}\right\rangle y = y_1 + y_2 = a \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$a = ?$, $\varphi = ?$ lassen sich beide einfach im Komplexen berechnen:

y_1 als Imaginärteil der komplexen Schwingung Y_1:

$$y_1 = \mathrm{Im}(Y_1) \text{ mit } \underline{\underline{Y_1}} = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + j\, a_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$= a_1 \cdot e^{j(\omega t + \varphi_1)}$$

$$= \underbrace{a_1 e^{j\varphi_1}} \cdot e^{j\omega t}$$

$$= \underline{\underline{A_1 \cdot e^{j\omega t}}}$$

Analog y_2 als $\mathrm{Im}(Y_2)$ mit $\underline{\underline{Y_2}} = \underbrace{a_2 e^{j\varphi_2}}_{A_2} \cdot e^{j\omega t} = \underline{\underline{A_2 \cdot e^{j\omega t}}}$

Überlagerung (Superposition) ist die Addition $y_1 + y_2 =$

$$= \mathrm{Im}(Y_1) + \mathrm{Im}(Y_2) = \mathrm{Im}(Y_1 + Y_2) = \mathrm{Im}(A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{j\omega t})$$

$$= \mathrm{Im}(\underbrace{[A_1 + A_2]}_{=: \underline{\underline{A = a \cdot e^{j\varphi}}}} e^{j\omega t}) = \mathrm{Im}(A e^{j\omega t}) = \mathrm{Im}(a \cos(\omega t + \varphi) +$$

$$+ j a \sin(\omega t + \varphi)) = \underline{a \cdot \sin(\omega t + \varphi)}.$$

Alternative für cos-Signale: $y_1 = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1) = Re(A_1 e^{j\omega t})$

$y_2 = a_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = Re(A_2 e^{j\omega t})$

mit $A_1 = a_1 e^{j\varphi_1}$ und $A_2 = a_2 e^{j\varphi_2}$

$$\underline{y_1 + y_2} = Re(A_1 e^{j\omega t}) + Re(A_2 e^{j\omega t})$$
$$= Re(A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{j\omega t})$$
$$= Re(\underbrace{[A_1 + A_2]}_{= \underline{A = a e^{j\varphi}}} e^{j\omega t}) = Re(a e^{j(\omega t + \varphi)}) =$$
$$= \underline{a \cos(\omega t + \varphi)}$$

▷ Wechselstromkreise, komplexe Widerstände und Leitwerte

In einem Wechselstromkreis erzeugt die sinusförmige Wechselspannung $u(t) = \underbrace{\hat{u}}_{\text{Scheitelwert}} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) = \sqrt{2}\, \underbrace{u_{eff}}_{\text{Effektivwert}} \sin(\omega t + \varphi_u)$

den gleichfrequenten sinusförmigen Wechselstrom

$$i(t) = \underbrace{\hat{i}}_{\text{Scheitelwert}} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i) = \sqrt{2}\, \underbrace{i_{eff}}_{\text{Effektivwert}} \sin(\omega t + \varphi_i)$$

[Effektivwert = quadratische zeitliche Mittelwert über eine Periode:

$u_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t)\, dt}$.]

Übergang ins Komplexe: $u(t) = Im(\hat{u} e^{j\varphi_u} \cdot e^{j\omega t}) = Im(U(t))$

$i(t) = Im(\hat{i} \cdot e^{j\varphi_i} \cdot e^{j\omega t}) = Im(I(t))$

Komplexer Widerstand (= Impedanz) ist die zeitunabhängige komplexe Zahl

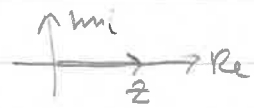
$$\underline{\underline{Z = \frac{U(t)}{I(t)} = \frac{\hat{u} \cdot e^{j\varphi_u}}{\hat{i} \cdot e^{j\varphi_i}} = \frac{u_{eff}}{i_{eff}} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}}} .$$

Scheinwiderstand $= |Z| = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} = \frac{u_{eff}}{i_{eff}}$

Phasenwinkel $= \varphi_u - \varphi_i$

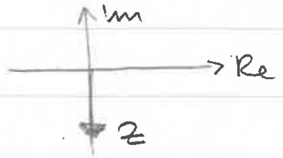
(1) Ohmscher Widerstand: $Z = R \in \mathbb{R}$ und $R > 0$

Phasenwinkel $= 0$



(2) Kapazität (kapazitiver Widerstand): Kapazität C

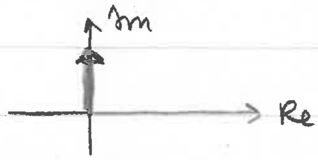
$$Z = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}$$ ... rein imaginär



Phasenwinkel $= -\frac{\pi}{2}$

(3) Induktivität (induktiver Widerstand): Induktivität L

$$Z = j\omega L$$, Phasenwinkel $= \frac{\pi}{2}$



komplexe Leitwerte: $Y = \frac{1}{Z}$ ... Kehrwert des komplexen Widerstands / der Impedanz

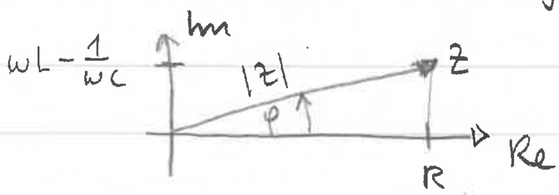
Die Kirchhoffschen Regeln gelten auch in der komplexen Wechselstromrechnung!

Bsp.:

Reihenschaltung

Gesamtimpedanz $= R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} =$

$$R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = |Z| \cdot e^{j\varphi} = Z$$



Wirkwiderstand $= Re(Z) = R$

Blindwiderstand $= Im(Z) = \omega L - \frac{1}{\omega C}$

Scheinwiderstand $= |Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$

▷ <u>Nachtrag zu komplexe Zahlen und Funktionen</u>: Additionstheoreme

vgl. Papula Formelsammlung und Wikipedia

<u>Bsp.</u>: Wir berechnen beide Seiten der Gleichung $e^{j(x+y)} = e^{jx} \cdot e^{jy}$, und setzen danach die Real- und Imaginärteile gleich:

$$e^{j(x+y)} = \cos(x+y) + j\sin(x+y)$$

$$\begin{aligned} e^{jx} \cdot e^{jy} &= [\cos(x) + j\sin(x)] \cdot [\cos(y) + j\sin(y)] = \\ &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) + \\ &\quad + j \cdot [\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)]. \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Realteile: } && \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ &\text{Imaginärteile: } && \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \end{aligned}\right\} \text{Additionstheoreme für sin und cos}$$