Elias Eder
21. Jänner 2022

Schriftliche Abschlussprüfung zu Förderung individueller Kompetenzen: Mathematik

- Dauer der Prüfung: 90 Minuten (bis maximal 120 Minuten)
- Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner, selbstgeschriebene Formelsammlung
- Schreiben Sie Ihren vollständigen Namen auf den Prüfungsbogen
- Lösen Sie alle Aufgaben direkt auf dem Prüfungsbogen

Name:

Personenkennzeichen:

Aufgabe	Erreichbare Punkte	Erreichte Punkte
1	20	
2	12	
3	8	
4	12	
5	12	
6	12	
7	10	
8	14	
Gesamt	100	

Name:
Personenkennzeichen:

1. Lineare Algebra 1 (20 Punkte):

(a) Überprüfen Sie anhand der Determinante, für welche Werte von a die nachfolgenden Vektoren linear abhängig sind (8 Punkte)?

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -a \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ 7 \end{pmatrix}$$

(b) Geben Sie ein Gleichungssystem in Matrixform an, welches 4 Gleichungen, 3 Unbekannte und keine Lösung besitzt. Geben Sie auch den Rang der einfachen und der erweiterten Koeffizientenmatrix an (3 Punkte).

(c) Geben Sie ein Gleichungssystem in Matrixform an, welches 3 Gleichungen und 3 Unbekannte besitzt und dessen Lösungsraum der $\mathbb{R}^2$ ist. Geben Sie auch den Rang der einfachen und der erweiterten Koeffizientenmatrix an (3 Punkte).

(d) Zeichnen Sie die Konturlinien der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = 2x_1 - 2x_2$. Bringen Sie die lineare Funktion in die Form $f(x) = \vec{c}^T \vec{x}$. Wie müssten sich die Werte des Koeffizientenvektors $\vec{c}$ verändern, damit die Konturlinien der gezeichneten Funktionswerte näher zusammenrücken (6 Punkte)?

1a)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -a & -2 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} = 14 - a^2 - 10 + 4 - 5a + 7a = 0$$

$$8 - a^2 + 2a = 0$$

$$a^2 - 2a - 8 = 0$$

$$a_{1/2} = 1 \pm \sqrt{9} \quad \begin{matrix} \nearrow a_1 = \underline{4} \\ \searrow a_2 = \underline{-2} \end{matrix}$$

b)

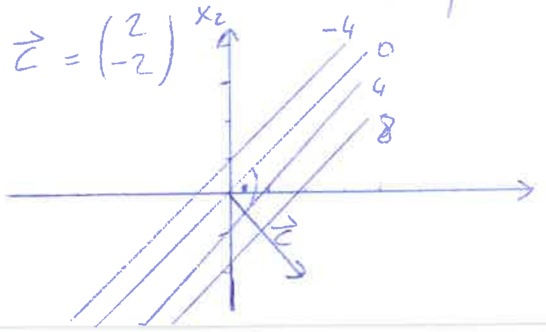
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} Rg(A) = 2 \\ Rg(A|b) = 3 \end{matrix} \Rightarrow \text{keine Lösung}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad Rg(A) = Rg(A|b) = 1 < n = 3$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ Lösungen}$$

d) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$



$\vec{c}$ müsste sich vergrößern, damit Linien konstanter Funktionswerte enger werden.

Name:
Personenkennzeichen:

2. Lineare Algebra 2 (12 Punkte):

Ein Autoverleih besitzt in Vorarlberg zwei Standorte: Dornbirn und Feldkirch. Zum betrachteten Zeitpunkt stehen 100 Autos in Dornbirn und 140 Autos in Feldkirch. Die Autos können an beiden Standorten retourniert werden. Im Schnitt werden 10 % der Autos, die in Dornbirn ausgeliehen werden, in Feldkirch retourniert und 30 % der Autos, die in Feldkirch ausgeliehen werden, in Dornbirn retourniert.

(a) Geben Sie die Übergangsmatrix **M** an ($\vec{x}_1 = \mathbf{M} \cdot \vec{x}_0$), die die dynamische Entwicklung der vorhandenen Autos an den beiden Standorten beschreibt (3 Punkte).

(b) Analysieren Sie anhand der Eigenwerte das dynamische Systemverhalten. Falls sich ein Gleichgewicht einstellt, ermitteln Sie die Gleichgewichtsaufteilung $\vec{x}_\infty$ der Leihautos auf die Standorte über die Eigenvektoren des relevanten Eigenwerts (9 Punkte).

a) $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 140 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{x}_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,9 & 0,3 \\ 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}}_{\hat{M}} \vec{x}_0$

b) $\det \begin{pmatrix} 0,9-\lambda & 0,3 \\ 0,1 & 0,7-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (0,9-\lambda)(0,7-\lambda) - 0,03 = 0$

$0,6 - 1,6\lambda + \lambda^2 = 0$

$\lambda_{1/2} = 0,8 \pm \sqrt{0,04}$ $\nearrow \lambda_1 = 1$, $\searrow \underline{\lambda_2 = 0,6}$

$\lambda = 1$:

EV: $\begin{pmatrix} -0,1 & 0,3 \\ 0,1 & -0,3 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}$!

$-x_1 + 3x_2 = 0$

$x_1 = 3x_2$

EV: $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{R}$

$\Longrightarrow \underline{x_\infty = \begin{pmatrix} 180 \\ 60 \end{pmatrix}}$

Name:
Personenkennzeichen:

3. **Regression (8 Punkte):**

Ein Polynom 2. Grades der Form $y = ax^2 + bx + c$ soll durch die gegebenen Messdaten gefittet werden:

x	y
0	−2
1	1
2	3,8
3	9,4
4	15
5	22,3
6	31

Formulieren Sie das Ordinary Least Squares - Problem in Matrixform für den besten Fit durch die Datenpunkte. Verwenden Sie die dabei die Zahlenwerte der gegebenen Messdaten.

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 6 & 36 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3,8 \\ 9,4 \\ 15 \\ 22,3 \\ 31 \end{pmatrix} \right\| \longrightarrow \min.$$

Name:
Personenkennzeichen:

4. Mehrdimensionale Differentialrechnung (12 Punkte):

Gegeben ist ein Hohlzylinder mit dem Innenradius $r_\mathrm{i} = 6$ cm, dem Außenradius $r_\mathrm{a} = 10$ cm und der Höhe $h = 20$ cm. Berechnen Sie mithilfe des totalen Differentials die Volumenänderung, die dieser Zylinder erfährt, wenn die Größen r_i, r_a und h wie folgt verändert werden: $\Delta r_\mathrm{i} = 0{,}2$ cm, $\Delta r_\mathrm{a} = -0{,}4$ cm und $\Delta h = 0{,}7$ cm. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der exakten Differenz des Volumens.

Hinweis: $V = (r_\mathrm{a}^2 - r_\mathrm{i}^2) \cdot \pi \cdot h$

$$dV = \partial V/\partial r_a \, dr_a + \frac{\partial V}{\partial r_i} dr_i + \frac{\partial V}{\partial h} dh$$

$$= 2 r_a \pi h \, dr_a - 2 r_i \pi h \, dr_i + (r_a^2 - r_i^2)\pi \, dh$$

$$= 1256{,}64 \, dr_a - 753{,}98 \, dr_i + 201{,}06 \, dh$$

$$= \underline{-512{,}71 \, cm^3}$$

$$\Delta V = V(6{,}2; 9{,}6; 20{,}7) - V(6; 10; 20) = \underline{-527{,}8 \, cm^3}$$

Name:
Personenkennzeichen:

5. **Mehrdimensionale Funktionen (12 Punkte):**

(a) Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

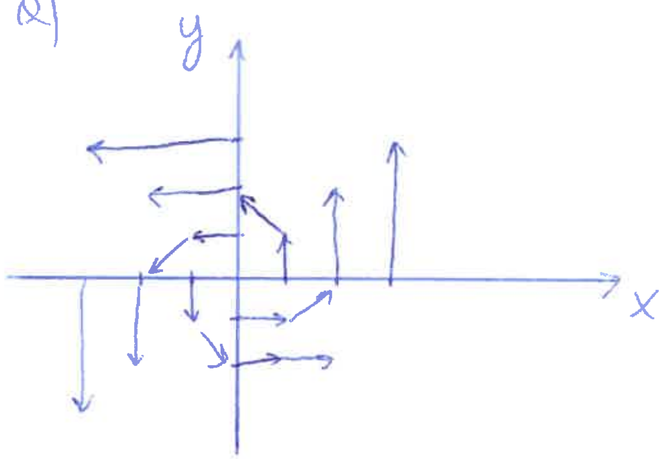
Skizzieren Sie das Vektorfeld und berechnen Sie die Rotation des Vektorfelds (6 Punkte).

(b) Gegeben ist das Skalarfeld

$$\phi(x, y, z) = x^2 \cdot e^{y \cdot z} + y \cdot z^3$$

Berechnen Sie den Gradienten des Skalarfelds. Geben Sie dann den Betrag des Gradientenvektors $|\nabla\phi|$ im Punkt $P = (2, 0, 1)$ an (6 Punkte).

a)



$$\mathrm{rot}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} =$$

$$1 - (-1) = \underline{2 \neq 0}$$

b)

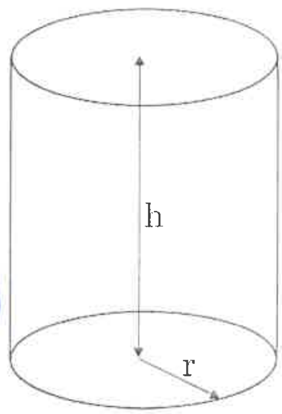
$$\nabla\phi = \begin{pmatrix} 2x e^{yz} \\ x^2 z e^{yz} + z^3 \\ x^2 y e^{yz} + 3yz^2 \end{pmatrix} \qquad \nabla\phi\Big|_{2,0,1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\nabla\phi| = \sqrt{16 + 25} = \underline{\sqrt{41}}$$

Name:
Personenkennzeichen:

6. **Nichtlineare Optimierung (12 Punkte):**

Die Wärmeverluste eines zylindrischen Warmwasserspeichers sollen minimiert werden. Über die Mantelfläche gehen 40 W/m^2 verloren und über die Deck- und die Grundfläche jeweils 20 W/m^2. Der Warmwasserspeicher besitzt ein Volumen von π m^3. Wie sind Radius und Höhe zu wählen, um den Wärmeverlust $\dot{Q}$ zu minimieren? **Hinweis:** $V_{\text{zyl}} = r^2\pi h$; $A_{\text{zyl,mantel}} = 2r\pi h$; $A_{\text{zyl,df,gf}} = r^2\pi$



$$\dot{Q} = 40 \cdot 2r\pi h + 40 r^2\pi$$
$$= 80r\pi h + 40r^2\pi$$

NB: $r^2\pi h = \pi$

$$\nabla\dot{Q} = \lambda \nabla NB: \begin{pmatrix} 80\cancel{\pi}h + 80r\cancel{\pi} \\ 80r\cancel{\pi} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2r\cancel{\pi}h \\ r^2\cancel{\pi} \end{pmatrix}$$

(1) $80h + 80r = \lambda 2rh$

(2) $80r = \lambda r^2$

aus (2) $\Rightarrow \lambda = \frac{80}{r}$

in (1) $80h + 80r = 160h$

$80r = 80h$

$\Rightarrow r = h$

$r^2\cancel{\pi}h = \cancel{\pi}1$

$r^3 = 1$

$r = h = 1\,m$

Name:
Personenkennzeichen:

7. **Arbeitsintegrale (10 Punkte):**

Gegeben ist das Differential $(4y^3 - 3x) \cdot dx + (12xy^2 - 4) \cdot dy$.

(a) Zeigen Sie rechnerisch, dass zu diesem Differential eine Stammfunktion existiert (3 Punkte).

(b) Bestimmen Sie die Stammfunktion (7 Punkte).

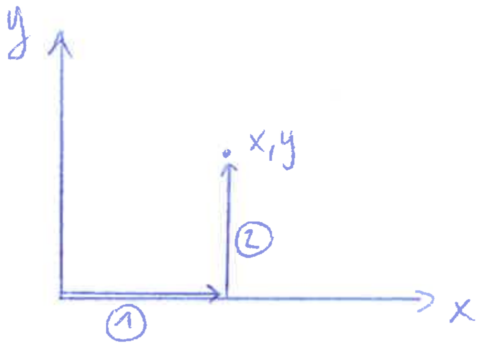
a) $$\begin{pmatrix}\partial/\partial x\\ \partial/\partial y\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4y^3-3x\\ 12xy^2-4\end{pmatrix} = 12y^2 - 12y^2 = 0 \Rightarrow \text{exakt}$$

$\Rightarrow$ Stammfunktion

b)

(1): $y = dy = 0$

$$\int_0^x -3x\,dx = \underline{-\frac{3}{2}x^2}$$



(2) $dx = 0 \quad x = x = \text{const.}$

$$\int_0^y (12xy^2 - 4)\,dy = \underline{4xy^3 - 4y + C}$$

$$F(x,y) = \underline{4xy^3 - 4y - \frac{3}{2}x^2 + C}$$

Name:
Personenkennzeichen:

8. **Differentialgleichungen (14 Punkte):**

(a) Lösen Sie die Differentialgleichung $y' \cdot (1+x^3) = x^2 y$ durch Separation der Variablen (6 Punkte).

(b) Gegeben sei das Anfangswertproblem: $y'' + 6y' + 9y = 0$ mit $y(0) = 1$ und $y'(0) = 1$. Klassifizieren Sie die Differentialgleichung bezüglich Homogenität, Ordnung und Linearität. Handelt es sich um eine gewöhnliche Differentialgleichung? Lösen Sie anschließend das Anfangswertproblem und geben Sie die partikuläre Lösung an (8 Punkte).

a) $\frac{dy}{dx}(1+x^3) = x^2 y$

$\frac{dy}{y} = \frac{x^2}{(1+x^3)} dx \quad | \cdot \int$

$\ln|y| = \ln|1+x^3|^{1/3} + c \quad | \cdot e^{\wedge}$

$\underline{y(x) = \sqrt[3]{1+x^3} \cdot c}$

① $= \int \frac{x^2}{1+x^3} dx$

$z = 1+x^3$

$\frac{dz}{dx} = 3x^2$

$dx = \frac{dz}{3x^2}$

① $= \int \frac{\cancel{x^2}}{z} \cdot \frac{dz}{3\cancel{x^2}} = \frac{1}{3}\ln(z) + c$

$= \underline{\ln(z^{1/3}) + c}$

b) $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$

$\lambda_{1/2} = -3 \pm \sqrt{9-9} \Rightarrow \underline{\lambda_1 = -3 = \lambda_2}$

$\underline{y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-3x} \cdot x}$

$y(0) = 1 \Rightarrow \underline{C_1 = 1}$

$y'(x) = -3e^{-3x} + C_2 e^{-3x} - 3C_2 x e^{-3x}$

$y'(0) = -3 + C_2 - 0 = 1$

$C_2 = \underline{4}$

$\underline{y(x) = e^{-3x} + 4x e^{-3x}}$